ENKELE DIDACTISCHE WENKEN VOOR WISKUNDEONDERWIJS IN DE DERDE GRAAD

KOEN DE NAEGHEL

Samenvatting. Beginnende leerkrachten wiskunde staan voor de moeilijke opdracht om abstracte concepten op eenvoudige maar correcte manier over te brengen. Didactische wenken kunnen daarbij helpen. In dit artikel motiveren we dat standpunt, en geven we enkele concrete voorbeelden.

Didactiek gaat gepaard met het hebben van een **visie** op het onderwijs. Zo'n visie is persoonsgebonden, vandaar dat leerkrachten ook op een verschillende manier les geven. Maar net door je ervaringen te delen met je collega's kun je die visie bevestigd zien, of zelfs verrijken met nieuwe inzichten.

In dit artikel bespreken we twee hoofdredenen om - vanuit de functie als leerkracht - voldoende aandacht te besteden aan didactiek.

1. Aanreiken van wiskundige begrippen

Leerlingen uit het middelbaar onderwijs krijgen heel wat wiskundige begrippen te verteren, zoals (we beperken ons even tot de derde graad):

functie	overgangsmatrix	afgeleide
primitieve functie	logaritme	algemene sinusfunctie
homografische functie	rijen	complexe getallen

De **inhoud** van de leerstofonderdelen ligt in grote mate vast: enerzijds uit het leerplan, anderzijds uit de wiskunde zelf (wiskundige correctheid, conventies en folklore). Zo is bijvoorbeeld de definitie van een homografische functie een vast gegeven:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad \text{waarbij } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ met } c \neq 0 \text{ en } ad \neq bc$$

Het voor de leerling vlot begrijpen van deze inhoud staat rechtstreeks in verband met de **manier waarop** die inhoud aangeboden wordt. Die manier waarop kent - in tegenstelling tot de inhoud van de leerstofonderdelen - een grote vrijheid. Want ook al bevat het leerplan pedagogisch-didactische wenken, de stap naar hoe je het effectief aanbrengt blijft reusachtig. Zo kan bijvoorbeeld het begrip homografische functie op verschillende manieren aangebracht worden: meteen door de definitie te geven, of aan de hand van een toepassing, of door te starten met enkele voorbeelden, enzovoort. En dan sta je als leerkracht voor de keuze. Welke manier kies je? Hierin ligt een grote uitdaging voor de leerkracht.

Datum: 29 november 2009. Dit artikel is een samenvatting van de gelijknamige werkwinkel die gegeven werd op de dag van de wiskunde in 2009 en 2010 aan de KULAK. De syllabus van deze werkwinkel is vrij verkrijgbaar op de website `http://www.koendenaeghel.be/` en werd uitgegeven in boekvorm [2].

De auteur is van mening dat het **keuzeproces gestuurd moet worden vanuit de - vaak persoonlijke - visie van de leerkracht op het benaderen van wiskundige concepten**. Pas dan zal de leerkracht met overtuiging en enthousiasme lesgeven: namelijk precies wanneer zijn keuzes stroken met de visie die hij/zij heeft op het aanbrengen van wiskunde.

Uiteraard dringen zich modeverschijnselen op. Enkele decennia geleden neigde men eerder naar de stijl [1] 'Bourbaki', denk maar aan de zogenaamde 'moderne wiskunde' (nog steeds de schrijfstijl van heel wat syllabi aan het hoger en universitair onderwijs):

(1) Definitie
(2) Eigenschappen (met bewijs)
(3) Voorbeelden

Tegenwoordig pleit men meer voor een aanpak in het genre:

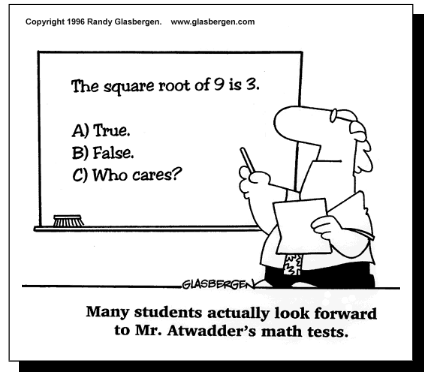
(1) Voorbeelden
(2) Definitie
(3) Eigenschappen (met of zonder bewijs)

De jongste visie is om inleidende voorbeelden aan te wenden om de definitie te 'verklaren' en om eigenschappen te introduceren. We kunnen dan eerder spreken van een fase '**op verkenning**' of '**op ontdekking**' waar je leerlingen in een actieve modus plaatst: zelfstandig (maar begeleid) ontdekken waarom nieuwe begrippen zich opdringen en wat hun eigenschappen zijn. Bovendien: wat leerlingen 'zelf' verkend/ontdekt hebben, onthouden ze langer. Denk bijvoorbeeld aan de formules voor verwante hoeken, zoals $\sin(\pi - \alpha)$. Een leerling die deze formules uit het hoofd leert, kan snel door de mand vallen - wat met $\sin(\alpha - \pi)$ - maar een leerling die weet hoe hij aan deze formules komt (door af te lezen op de goniometrische cirkel) heeft meer kans op succes.

Deze visie heeft ook een historisch draagvlak. Hoe kwamen wiskundigen aan begrippen als inverse functie of afgeleide? Hoe vond men destijds eigenschappen als rekenregels van logaritmen? Omdat die regels zich eigenlijk op een natuurlijke wijze opdringen. Dat laatste illustreren we met het aanbrengen van rationale machten.

[1] Nicolas Bourbaki [1] verwijst naar een groep van (voornamelijk) Franse wiskundigen uit de 20ste eeuw die een reeks wiskundige boeken schreven met bedoeling een volledige behandeling te geven van de moderne wiskunde. De nadruk lag op strengheid en volledigheid. Bourbaki introduceerde het symbool $\emptyset$ voor de lege verzameling, $\Rightarrow$ voor de implicatie, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ voor de gangbare getallenverzamelingen, C_A voor het complement van een verzameling A alsook de termen injectief, surjectief en bijectief.

Vraag. *Wat is* $2^{\frac{1}{3}}$ *?*



Many students actually look forward to Mr. Atwadder's math tests.

Elke leerkracht wiskunde weet dat $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$. Maar hoe krijg je dat aan de leerlingen uitgelegd? Door hen te tonen dat het zich opdringt.

Op ontdekking. *Wat is* $2^{\frac{1}{3}}$ *?*
Wat dit ook is, we willen wel dat de gekende regenregels voor gehele machten nog steeds blijven gelden.
Zo wensen we dat

$$\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2^{\frac{1}{3}\cdot 3} = 2^1 = 2$$

Maar dan is $2^{\frac{1}{3}}$ *een oplossing van* $x^3 = 2$, *die als oplossing* $\sqrt[3]{2}$ *heeft.*
Dus moet $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$.

Na ons pleidooi voor een zelfstandig (begeleid) ontdekken, staan we stil bij de vraag die een leerkracht zich erg vaak stelt of hoort te stellen:

Hoe leg ik het zo goed mogelijk uit?

We zijn van mening dat die vraag kan beantwoord worden aan de hand van een gestuurd denkproces. De leerkracht kan zichzelf enkele didactische wenken eigen maken, door het bewust stellen van meer specifieke vragen, zoals bijvoorbeeld:

Vraag 1. Welke oplossingsmethode lijkt het meest logisch voor de leerlingen?

Vraag 2. Waarin ligt de oorsprong van die oplossingsmethode? Wat is de essentie?

Vraag 3. Kunnen we die methode visueel ondersteunen?

We geven toelichting door zo'n proces te bespreken bij de volgende basisvraag.

Voorbeeld. *Beschouw de functie* $f(x) = 3x - 2$. *Bepaal* $f(2 - x)$.

In de ogen van een leerkracht is het duidelijk dat de oplossing als volgt gevonden wordt (wat meteen de meest logische methode lijkt):

$$f(2-x) = 3(2-x) - 2 = -3x + 4$$

Voor de meeste leerlingen is deze regel niet duidelijk. Hoe leg je het uit?

Een mogelijke uitleg zou kunnen zijn:

Uitleg 1. $f(x) = 3x - 2$.
Vervang x *door* $2 - x$.
Dan is $f(2-x) = 3(2-x) - 2 = -3x + 4$.

Toch hebben leerlingen bedenkingen bij deze uitleg: "Hoe weet je dat $x = 2 - x$? Is x dan gelijk aan 1?" Terechte vragen.

Waarom werkt deze oplossingsmethode? Bovenstaande redenering vindt zijn oorsprong in het eenvoudige feit dat, in een functievoorschrift $f(x)$, de variabele x een zogenaamde 'dummy variabele is'. We mogen dus even goed de letter x vervangen door een andere letter t, zodat $f(t) = 3t - 2$. Laten we de variabele t nu ook afhangen van de variabele x via $t = 2 - x$, dan vinden we inderdaad $f(2 - x) = 3(2 - x) - 2 = -3x + 4$. Een tweede poging is dan ook

Uitleg 2. $f(x) = 3x - 2$.
Dus $f(t) = 3t - 2$.
Stel $t = 2 - x$.
Dan is $f(2 - x) = 3(2 - x) - 2 = -3x + 4$.

Leerlingen die nu de vraag stellen waarom $t = 2 - x$ kun je helpen met: "omdat je graag $f(2-x)$ wil kennen, en er staat $f(t)$, dus daarom stellen we $t = 2-x$". Erg logisch dus.

En dan denken we onze goede uitleg gevonden te hebben. Maar zijn we daar zo zeker van? Wiskundigen hebben niet de minste problemen met de uitleg: "omdat $f(x) = 3x-2$, is $f(t) = 3t - 2$". Maar laten we niet vergeten: hoe meer 'letters' er in een redenering opduiken, hoe sneller leerlingen het noorden kwijt raken en afhaken.

We kunnen de oplossingsmethode nog verder terug brengen naar de essentie. We hebben een nieuwe letter t ingevoerd om precies de verwarring bij: "vervang x door $2-x$" op te heffen. Maar moet dat wel een letter zijn? In principe kunnen we x vervangen door eender welk symbool dat - om de wiskundige juistheid te bewaren - een getal voorstelt. Bijvoorbeeld [2] het symbool $\square$. En uiteraard,

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = 3x - 2 \end{aligned} \qquad \text{is logisch equivalent met} \qquad \begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \square &\mapsto f(\square) = 3 \cdot \square - 2 \end{aligned}$$

Bovendien zorgt het symbool $\square$ voor visuele ondersteuning:

Uitleg 3. $f(x) = 3x - 2$.
Dus $f(\square) = 3 \cdot \square - 2$.
Dan is $f(\boxed{2 - x}) = 3 \cdot \boxed{2 - x} - 2 = -3x + 4$.

2. Aanreiken van werkwijzen

Een tweede reden om als leerkracht voldoende aandacht te besteden aan didactiek is het aanreiken van werkwijzen. Leerlingen worden geacht bepaalde (basis)werkwijzen meester te worden, waarmee zij wiskundige begrippen in een concrete situatie kunnen toepassen. Daar waar sterke leerlingen geen behoefte hebben aan een stappenplan, vallen minder sterke leerlingen uit de boot. Net zoals een minder begaafde kok behoefte heeft aan een

[2]Het symbool $\square$ kun je uitspreken als 'doosje', zodat je later bij het schrijven van $\boxed{2 - x}$ de '$2 - x$ in het doosje legt'.

welomlijnd recept, zo hebben ook minder sterke leerlingen nood aan een structureel '**recept**' om een modelvraag aan te pakken.

Als voorbeeld beschouwen we de werkwijze voor het bepalen van nulwaarden van een functie f.

> **Vraag.** *Bepaal de nulwaarden van* $f(x)$
> **Recept.** *Los op:* $f(x) = 0$

Als leerkracht ben je geneigd te denken dat leerlingen zo'n recept zelf wel weten te vinden. Maar ervaring leert toch anders. Zelfs voor sterke leerlingen (zoals zesde jaar ASO, 8 lestijden per week) blijkt het volgende erg waardevol:

> **Vraag.** *Vergelijking van de raaklijn* t *in het punt* $P(a, \cdot)$ *aan de grafiek van een functie* f
> **Recept.** *De vergelijking van de raaklijn* t *is*
> $$\boxed{t : y - f(a) = f'(a)(x - a)}$$
> *Bereken* $f'(x)$*, daarna* $f'(a)$ *en vul alles in.*

Mogen leerlingen hun receptenboek gebruiken tijdens toets of proefwerk? Daar heb je als leerkracht - behoudens het leerplan - de keuze. Wil je keukenpieten die zonder boek koken maar eerder basisgerechten maken, of chefs met een kookboek in de hand waarvan je meer gewaagde gerechten verwacht?

3. Besluit

Over theater zegt men:

> Of je publiek echt iets begrijpt van **wat** je begrijpt...
>
> ...hangt af van **hoe** je het vertelt.

Het idee van dit artikel in een notendop!

Referenties

[1] M. Mashaal, *Bourbaki: een geheim wiskundig genootschap*, Amsterdam: Natuurwetenschap & Techniek, 2009.

[2] K. De Naeghel, *Enkele didactische wenken voor wiskundeonderwijs in de derde graad*, UniBook, Puurs, 2011.

Koen De Naeghel, Onze-Lieve-Vrouwecollege, Collegestraat 24, 8310 Brugge.
E-mail address: koendenaeghel@hotmail.com