A brief history of logarithms

Voordracht 5aGWi8-5aLWi8-5cWeWi8, OLVA

door

Koen De Naeghel

26 oktober 2007

1 Oorsprong

> Students usually find the concept of logarithms very difficult to understand.
>
> B.L. van der Waerden, 1957

- **Stifel, 1544** linkte een rekenkundige rij met een meetkundige rij

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	19	...
y	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	...	524288	...

door op te merken dat door overgang van onder naar boven **een product wordt omgezet in een som**. Dat dit handig kan zijn volgt bijvoorbeeld uit

$8 \cdot 32 = ?$ $\longrightarrow$

x	3	5
y	8	32

x	3	5	8
y	8	32	256

$\longrightarrow$ $8 \cdot 32 = 256$

$512 \cdot 1024 = ?$ $\longrightarrow$

x	9	10
y	512	1024

x	9	10	19
y	512	1024	524288

$\longrightarrow$ $512 \cdot 1024 = 524288$

Zo'n tabellen duiden een relatie aan tussen getallen. Wegens de Griekse woorden

$\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$ voor "woord, relatie"

$\alpha\varrho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$ voor "getal"

heette men[1] dit soort tabellen logaritmentafels (Engels: logarithmic tables).

- **Voordeel.** Omdat optellen veel eenvoudiger is dan vermenigvuldigen, waren logaritmentafels uitermate handig om grote getallen te vermenigvuldigen.
- **Nadeel.** Iemand moest die logaritmentafels opstellen.

[1] Historici menen dat de term "logaritme" afkomstig is van Napier,1614.

- **Obstructie.** Halfweg de 16de eeuw was er in het Westen nog steeds een verward stelsel van maten en gewichten.

  Alhoewel het decimale positiestelsel al lang bekend was in het Oosten, duurde het tot 1585 toen **Stevin**[2] met het boek *De Thiende* een voorstel deed om het stelsel van maten en gewichten in een decimaal stelsel om te zetten.

- **Napier, 1614** herontdekte het verband van Stifel en deed een eerste poging om logaritmentafels op te stellen. Napier's eerste poging was nogal onbeholpen, aangezien zijn beide rijen zich verhouden als

  $$x = \text{Nep.}\log y \Leftrightarrow 10^7\, e^{-\frac{x}{10^7}} = y$$

  met $e = 2,71828182\ldots$ het getal van Euler. Zo vinden we

x	x_1	x_2	$x_1 + x_2$
y	y_1	y_2	$10^{-14} \cdot y_1 y_2$

  Dit systeem bevredigde ook Napier niet.

  Opmerking. We vinden dat

  $$\begin{aligned} & \text{Nep.}\log y = 10^7(\ln 10^7 - \ln y) = 161180957 - 10^7 \ln y \\ \Rightarrow\quad & \text{Nep.}\log 1 = 161180957 \end{aligned}$$

  Men maakt dus een fout als men de natuurlijke logaritme $\ln x = {}^e\log x$ de Neperiaanse logaritme noemt!

- **Briggs, 1617** was een groot bewonderaar van Napier. Hij besloot een decimaal systeem op te bouwen met

  $$\boxed{x = \log y \Leftrightarrow 10^x = y}$$

  In onze huidige notatie is $\log y$ de logaritme met grondtal $a = 10$, dus $\log y = {}^{10}\log y$. We vinden

x	x_1	x_2	$x_1 + x_2$
y	y_1	y_2	$y_1 y_2$

  In 1624 publiceerde Briggs de zogenaamde "Briggse logaritmen" van de gehele getallen van 1 tot 20000 en van 90000 tot 100000 in 8 decimale plaatsen.

- **de Decker, 1626** en **Vlacq, 1627-1628** vulden de leemte in de logaritmentafel (logaritmen van 1 tot en met 100000 in 10 decimalen).

- De nieuwe uitvinding werd onmiddellijk door astronomen en wiskundigen met veel enthousiasme begroet, vooral door **Kepler**, die een lange en pijnlijke ervaring met gecompliceerde berekeningen achter de rug had.

- **Het verband met exponentiële functies.** Het ontstaan van logaritmen, zoals hierboven aangegeven, is historisch gesproken verwarrend, omdat de exponentiële functies zoals 2^x, 10^x en e^x pas in de tweede helft van de 17de eeuw zijn ingevoerd. Napier kende het begrip van een basis (grondtal a) niet.

- **De rol van Euler**

  > ...our students of mathematics would profit much more from a study of Euler's *Introductio in Analysin Infinitorum*, rather than of the available modern textbooks.
  >
  > André Weil, 1979

  Natuurlijke logaritmen, gebaseerd op wat wij nu als

  $$\boxed{x = \ln y \Leftrightarrow e^x = y}$$

  schrijven, verschenen bijna gelijktijdig met de logaritmen van Briggs, maar hun fundamentele betekenis werd maar begrepen toen de differentiaal- en integraalrekening reeds ontwikkeld was.

  Het verband tussen logaritmen, de afstand van breedtecirkels in een kaartprojectie van Mercator, de exponentiële functie e^x, de natuurlijke logaritme $\ln x$ en de integraal van $\frac{1}{x}$ is langzaam ontdekt, en wordt voor het eerst door **Euler** in 1748 helder uiteengezet. Rekenregel 4 (verandering van grondtal)

  $$\boxed{{}^b\log y = \frac{{}^a\log y}{{}^a\log b}}$$

  wordt Euler's "Golden Rule" genoemd.

[2] 1548-1580 Brugge; 1580-1620 Leiden

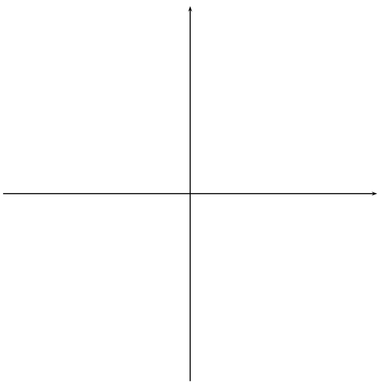
2 Hoe logaritmentabellen werken

- Functievoorschrift: $y = 10^x$

Tabel van enkele functiewaarden:

x	0	1	2	3	4	5
y						

Grafiek: exponentiële groei

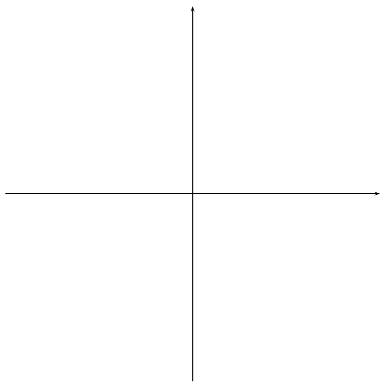


- Functievoorschrift: $x = \log y$

Tabel van enkele functiewaarden:

y	
x	

Grafiek: logaritmische groei



- Rekenregel 1 zegt:

$$\boxed{\log(y_1 \cdot y_2) = \log y_1 + \log y_2}$$

- **Werkwijze**

$y_1 \cdot y_2 = ?$ $\longrightarrow$

x	x_1	x_2
y	y_1	y_2

$\uparrow$

x	x_1	x_2	$x_1 + x_2$
y	y_1	y_2	$y_1 \cdot y_2$

$\downarrow$ $\longrightarrow$ $y_1 \cdot y_2 \approx \ldots$

- **Voorbeelden**

1) Vraag: $123456 \cdot 789123 = ?$

$123456 \cdot 789123 = ?$ $\longrightarrow$

x	$\ldots$	$\ldots$
y	123456	789123

$\uparrow$

x	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
y	123456	789123	$\ldots$

$\downarrow$ $\longrightarrow$ $123456 \cdot 789123 \approx \ldots$

2) Vraag: $8^{88} \cdot 9^{99} = ?$

3 Opstellen van logaritmentabellen

> Tabularum autem logarithmicarum amplissimus est usus ...
>
> Euler, *Introducio*, 1748.

Omdat optellen veel eenvoudiger is dan vermenigvuldigen, zijn logaritmentafels uitermate handig om grote getallen te vermenigvuldigen. Maar hoe stelde men deze tabellen op?

- De grondformule van logaritmen luidt

$$\boxed{10^x = y \Leftrightarrow x = \log y}$$

waaruit - uiteraard - volgt dat $\log 10 = 1$.

- Rekenregel 3 zegt

$$\boxed{\log(y^r) = r\, \log y}$$

Zo is

$$\log\sqrt{10} = \frac{1}{2}\log 10 = \frac{1}{2}$$
$$\log\sqrt{\sqrt{10}} = \frac{1}{2}\log\sqrt{10} = \frac{1}{4}$$
$$\log\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}} = \frac{1}{2}\log\sqrt{\sqrt{10}} = \frac{1}{8}$$

en door $\sqrt{10}$, $\sqrt{\sqrt{10}}$, $\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}$, ... te berekenen vinden we

y	$\log y$
10	1
2.1623	0.5
1.7783	0.25
1.3335	0.125

en via Rekenregel 1

y	$\log y$
10	1
7.4989	0.875
5.6234	0.75
4.2170	0.625
2.1623	0.5
2.3714	0.375
1.7783	0.25
1.3335	0.125

- **Probleem.** We willen de logaritme kennen van getallen zoals 2 of 4 en niet alleen van $4,2170$ of $2,3714$.
- **De methode van Briggs, 1617.** We zoeken bijvoorbeeld $x = \log 2$.

Stap 1. Bereken

$$\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}} \qquad \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$$
$$\sqrt{\sqrt{10}} = 10^{\frac{1}{2^2}} \qquad \sqrt{\sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{2^2}}$$
$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}} = 10^{\frac{1}{2^3}} \qquad \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = 2^{\frac{1}{2^3}}$$
$$\vdots$$
$$\underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{10}}}}_{54 \text{ keer } \sqrt{\ }} = 10^{\frac{1}{2^{54}}} \qquad \underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}_{54 \text{ keer } \sqrt{\ }} = 2^{\frac{1}{2^{54}}}$$

$$10^{\frac{1}{2^{54}}} \approx \underbrace{1,00000000000000012781914932003235}_{1+b} \qquad 2^{\frac{1}{2^{54}}} \approx \underbrace{1,00000000000000003847739796558310}_{1+c}$$

Stap 2. Wegens de grondformule van logaritmen is

$$\boxed{10^x = 2 \Leftrightarrow x = \log 2}$$

We hebben

$$1 + c = 2^{\frac{1}{54}} = (10^x)^{\frac{1}{54}} = \left(10^{\frac{1}{54}}\right)^x = (1+b)^x \approx 1 + bx$$

waaruit

$$\log 2 = x \approx \frac{c}{b} = \frac{3847739796558310}{12781914932003235} \approx 0,3010299956638812$$

Dit geeft ons één logaritme!

De hoeveelheid werk om de logaritmen van 1 tot 100000 te vinden is onvoorstelbaar.