Voorbereidende sessie toelatingsexamen

Wiskunde 2 - Algebra en meetkunde

Dr. Koen De Naeghel[1]

KU Leuven Kulak, woensdag 20 maart 2019

[1] Presentatie en opgeloste oefeningen zijn digitaal beschikbaar op http://www.koendenaeghel.be.

Inhoud

Leerstofafbakening

Algebra

- Rekenen met absolute waarde
- Rekenregels van machtsverheffing
- Rekenregels van logaritme
- Bewerkingen met veeltermen

Meetkunde

- Sinus, cosinus en tangens
- Eigenschappen van een driehoek en cirkel
- Vergelijking van een rechte, cirkel en parabool
- Gemeenschappelijke punten

Examenvragen

Actief gedeelte - Maken van oefeningen

- Algebra
- Meetkunde
- Antwoorden

Leerstofafbakening

WISKUNDE

1. Algebra
   (a) bewerkingen van reële getallen en rekenregels
   (b) rekenen met absolute waarde van reële getallen
   (c) rekenregels van machtsverheffing en logaritme
   (e) reële oplossingen van vierkantsvergelijkingen
   (f) veeltermen met reële coëfficiënten: bewerkingen, ontbinden in factoren van veeltermen in eenvoudige gevallen, veeltermvgln.
2. Meetkunde
   (a) eigenschappen van driehoeken, vierhoeken en cirkels
   (b) omtrek en oppervlakte van driehoeken, vierhoeken en cirkels
   (c) snijpunten van rechten en cirkels, snijpunten van rechten en parabolen
   (d) meten van hoeken in graden en radialen
   (e) de goniometrische getallen van hoeken en van verwante hoeken
   (f) goniometrische getallen in functie van de lengten van de zijden in een rechthoekige driehoek
   (g) goniometrische formules: grondformule, verdubbelingsformule

Algebra - Rekenen met absolute waarde

- **Algemeen** $\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{als } x \geq 0 \\ -x & \text{als } x < 0 \end{cases}}$
- **Voorbeeld 1** Welke waarden x voldoen aan de ongelijkheid

$$\left|x - \frac{5}{2}\right| < 2$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow &\quad -2 < x - \frac{5}{2} < 2 \\
\Leftrightarrow &\quad -2 + \frac{5}{2} < x < 2 + \frac{5}{2} \\
\Leftrightarrow &\quad -\frac{4}{2} + \frac{5}{2} < x < \frac{4}{2} + \frac{5}{2} \\
\Leftrightarrow &\quad \frac{1}{2} < x < \frac{9}{2} \\
\Leftrightarrow &\quad x \in \left]\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right[
\end{aligned}$$

Onthoud: $\boxed{|\triangle| < a \quad \Leftrightarrow \quad -a < \triangle < a}$

Algebra - Rekenregels van machtsverheffing

- **Voorbeeld 2** Gegeven is de functie $f(x) = 9^{-x}$. Vereenvoudig

$$A = \frac{f\left(x - \frac{1}{2}\right) - f\left(x + \frac{1}{2}\right)}{f(x+1) - f(x-1)}$$

$$= \frac{9^{-(x-\frac{1}{2})} - 9^{-(x+\frac{1}{2})}}{9^{-(x+1)} - 9^{-(x-1)}} \qquad f(\square) = 9^{-\square}$$

$$= \frac{9^{-x+\frac{1}{2}} - 9^{-x-\frac{1}{2}}}{9^{-x-1} - 9^{-x+1}} \qquad -(\square + \triangle) = -\square - \triangle$$

$$= \frac{9^{-x} \cdot 9^{\frac{1}{2}} - 9^{-x} \cdot 9^{-\frac{1}{2}}}{9^{-x} \cdot 9^{-1} - 9^{-x} \cdot 9^{1}} \qquad a^{\square+\triangle} = a^{\square} \cdot a^{\triangle}$$

$$= \frac{9^{\frac{1}{2}} - 9^{-\frac{1}{2}}}{9^{-1} - 9^{1}} \qquad a^{-\square} = \frac{1}{a^{\square}}$$

$$= \frac{\sqrt{9} - \frac{1}{\sqrt{9}}}{\frac{1}{9} - 9} \qquad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$= \frac{3 - \frac{1}{3}}{\frac{1}{9} - 9} \cdot \frac{9}{9} = \frac{27 - 3}{1 - 81} = -\frac{24}{80} = -\frac{3}{10}$$

Algebra - Rekenregels van logaritme

- **Algemeen** $\boxed{{}^{a}\log x = * \quad \Leftrightarrow \quad x = a^{*}}$ en $\boxed{{}^{e}\log x = \ln x}$

  Voorbeeld: ${}^{2}\log 16 = 4$ want $16 = 2^{4}$

- **Voorbeeld 3** Los de volgende vergelijking op naar x:

$$
\begin{aligned}
& 3^{x-1} = 8^{3x} \\
\Leftrightarrow \quad & \ln\left(3^{x-1}\right) = \ln\left(8^{3x}\right) \\
\Leftrightarrow \quad & (x-1)\ln 3 = 3x \ln 8 \\
\Leftrightarrow \quad & x \ln 3 - \ln 3 = 3x \ln 8 \\
\Leftrightarrow \quad & x(\ln 3 - 3\ln 8) = \ln 3 \\
\Leftrightarrow \quad & x = \frac{\ln 3}{\ln 3 - 3\ln 8} \\
& \quad = \frac{\ln 3}{\ln 3 - \ln(8^3)} \\
& \quad = \frac{\ln 3}{\ln\left(\frac{3}{512}\right)}
\end{aligned}
$$

$$\ln\left(a^{\square}\right) = \square \ln a$$

$$\ln(\square \cdot \triangle) = \ln \square + \ln \triangle$$

$$\ln\left(\frac{\square}{\triangle}\right) = \ln \square - \ln \triangle$$

Algebra - Bewerkingen met veeltermen

- **Voorbeeld 4** Hoeveel bedraagt de som $p+q$ als

$$\frac{x(2x+3)}{x^2+3x+2} = \frac{p(x+1)}{x+2} + \frac{q}{x+1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x(2x+3)}{(x+2)(x+1)} = \frac{p(x+1)}{x+2} + \frac{q}{x+1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x(2x+3)}{(x+2)(x+1)} = \frac{p(x+1)}{x+2} \cdot \frac{x+1}{x+1} + \frac{q}{x+1} \cdot \frac{x+2}{x+2}$$

$$\Rightarrow \quad x(2x+3) = p(x+1)^2 + q(x+2)$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2+3x = p(x^2+2x+1) + qx + 2q$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2+3x = px^2 + (2p+q)x + (p+2q)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 2 = p \\ 3 = 2p+q \\ 0 = p+2q \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad p = 2 \quad \text{en} \quad q = -1$$

$$\Rightarrow \quad p+q = 1$$

Algebra - Bewerkingen met veeltermen

- **Voorbeeld 5** Bepaal $p(q+r)$ als $x^4+4x^3+6px^2+4qx+r$ deelbaar is door x^3+3x^2+9x+3.

  Oplossing Dan moet

$$\begin{aligned} & x^4+4x^3+6px^2+4qx+r \\ = \quad & (x^3+3x^2+9x+3)\cdot(\ldots x+\ldots) \\ = \quad & (x^3+3x^2+9x+3)\cdot\left(1\cdot x+\frac{r}{3}\right) \\ = \quad & 1\cdot x^4+\left(\frac{r}{3}+3\right)\cdot x^3+(r+9)\cdot x^2+(3r+3)\cdot x+r \end{aligned}$$

  zodat

$$\begin{cases} 4=\dfrac{r}{3}+3 \\ 6p=r+9 \\ 4q=3r+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=3 \\ p=2 \\ q=3 \end{cases}$$

  Antwoord $p(q+r)=2\cdot(3+3)=12$

  (ALTERNATIEF: staartdeling)

Algebra - Bewerkingen met veeltermen

- **Voorbeeld 6** $f(x) = x^3 + px^2 - 8x + q$ is deelbaar door $x - 1$ en de rest bij deling door $x^2 - 9$ is $x - 9$. Wat is q?

  Oplossing

  $$\begin{aligned} f(x) \text{ deelbaar door } x-1 &\Rightarrow f(x) = (x-1)\cdot(\ldots x^2 + \ldots x + \ldots) \\ &\Rightarrow f(1) = 0 \\ &\Rightarrow 1 + p - 8 + q = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{p + q = 7} \end{aligned}$$

  $f(x)$ delen door $x^2 - 9$ geeft als rest $x - 9$

  $$\begin{aligned} &\Rightarrow f(x) = (x^2-9)\cdot(\ldots x + \ldots) + x - 9 \\ &\Rightarrow \begin{cases} f(\ \ 3) = 0 + 3 - 9 \\ f(-3) = 0 + (-3) - 9 \end{cases} \\ &\Rightarrow \boxed{9p + q = -9} \end{aligned}$$

  Antwoord $q = 9$

Algebra - Bewerkingen met veeltermen

- **Voorbeeld 7** Door welke veelterm is $x^4 + 4$ deelbaar?

(A) $x^2 - 2$

(B) $x^2 + 2$

(C) $x^2 + 2x - 2$

(D) $x^2 + 2x + 2$

Oplossing

$$\begin{aligned} f(x) \text{ deelbaar door (A)} &\Rightarrow f(x) = (x^2 - 2)\cdot(\ldots x^2 + \ldots x + \ldots) \\ &\Rightarrow f(\sqrt{2}) = 0 \\ &\Rightarrow 4 + 4 = 0 \text{ NEE!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) \text{ deelbaar door (B)} &\Rightarrow f(x) = (x^2 + 2)\cdot(\ldots x^2 + \ldots x + \ldots) \\ &\qquad = (x^2 + 2)\cdot(x^2 + bx + 2) \\ &\qquad = x^4 + bx^3 + 4x^2 + 2bx + 4 \text{ NEE!} \end{aligned}$$

$$f(x) \text{ deelbaar door (C)} \Rightarrow \ldots \text{ NEE!}$$

Antwoord (D)

Algebra - Ontbinden in factoren van veeltermen

- **Merkwaardige producten**

$$a^2 + b^2 = \text{ niet ontbindbaar in lineaire factoren}$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

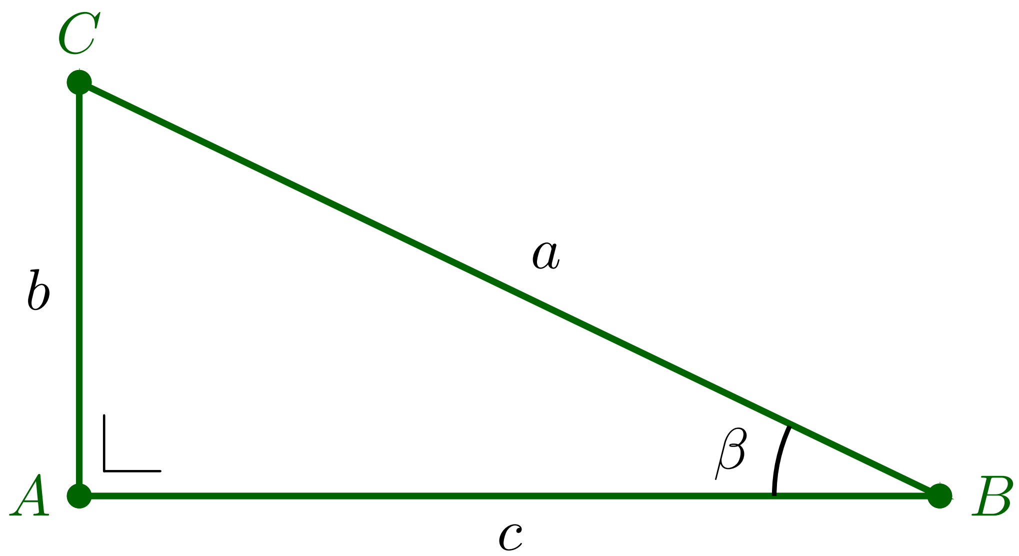
$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$
$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$$
$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$$

Meetkunde - Sinus, cosinus en tangens van scherpe hoeken

$$\sin\beta = \frac{\text{overstaand}}{\text{schuin}} = \frac{b}{a}$$

$$\cos\beta = \frac{\text{aanliggend}}{\text{schuin}} = \frac{c}{a}$$

$$\tan\beta = \frac{\text{overstaand}}{\text{aanliggend}} = \frac{b}{c}$$



Veelvoorkomende scherpe hoeken:

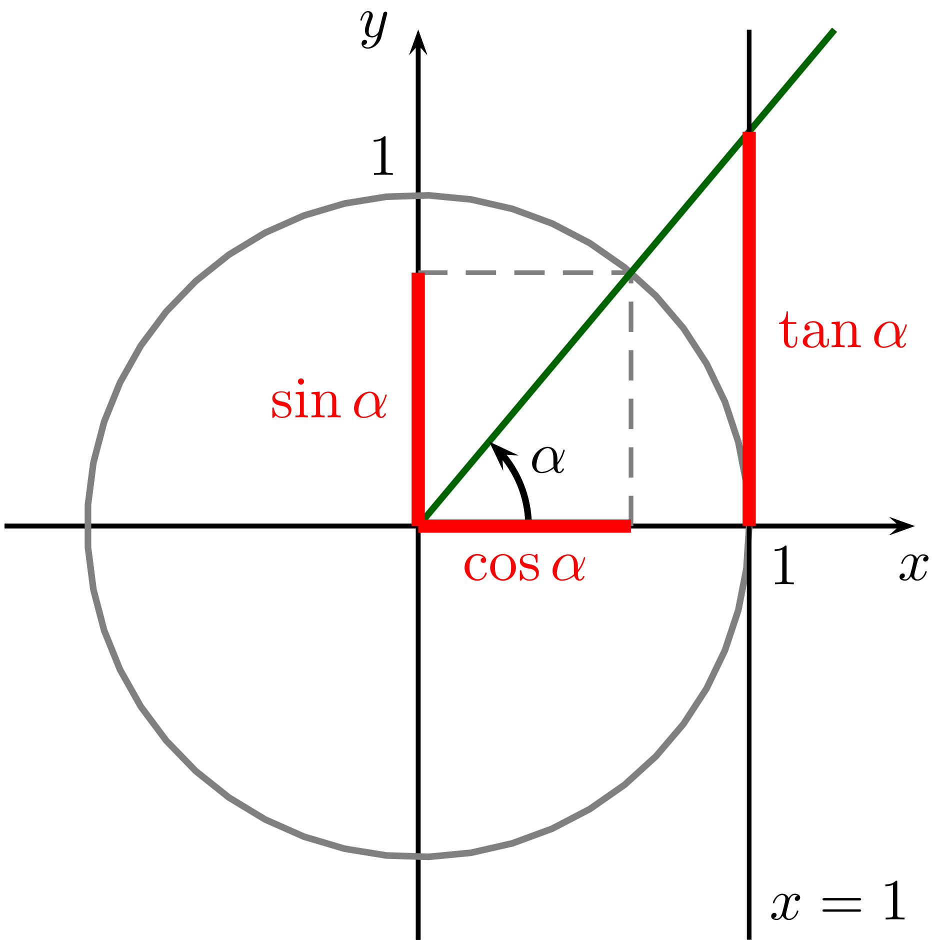
α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\vert$

Meetkunde - Sinus, cosinus en tangens van will. hoeken

$\sin\alpha$: projectie op y-as

$\cos\alpha$: projectie op x-as

$\tan\alpha$: projectie op rechte $x = 1$



Teken van sinus, cosinus en tangens in de vier kwadranten:

α	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\alpha$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\tan\alpha$	$+$	$-$	$+$	$-$

Grondformule: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Verdubbelingsform.: $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$ en $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

- **Voorbeeld 8**

  Gegeven zijn de coördinaten van een punt: $x = -\sqrt{8}\sin 200^\circ$ en $y = -\sqrt{11}\cos 140^\circ$. In welk kwadrant is dit punt gelegen?

  (A) I

  (B) II

  (C) III

  (D) IV

  Oplossing

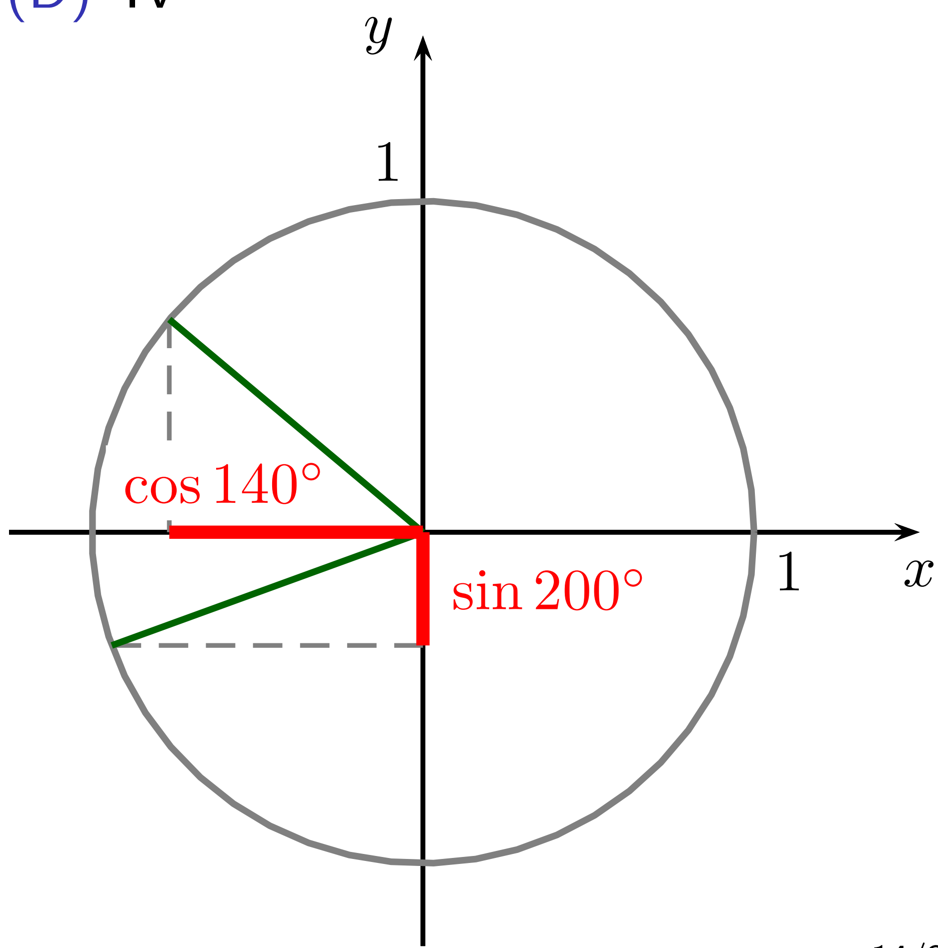
  Lees het teken af:

  $$\sin 200^\circ < 0$$

  $$\cos 140^\circ < 0$$

  Dus $x > 0$ en $y > 0$

  Antwoord (A)



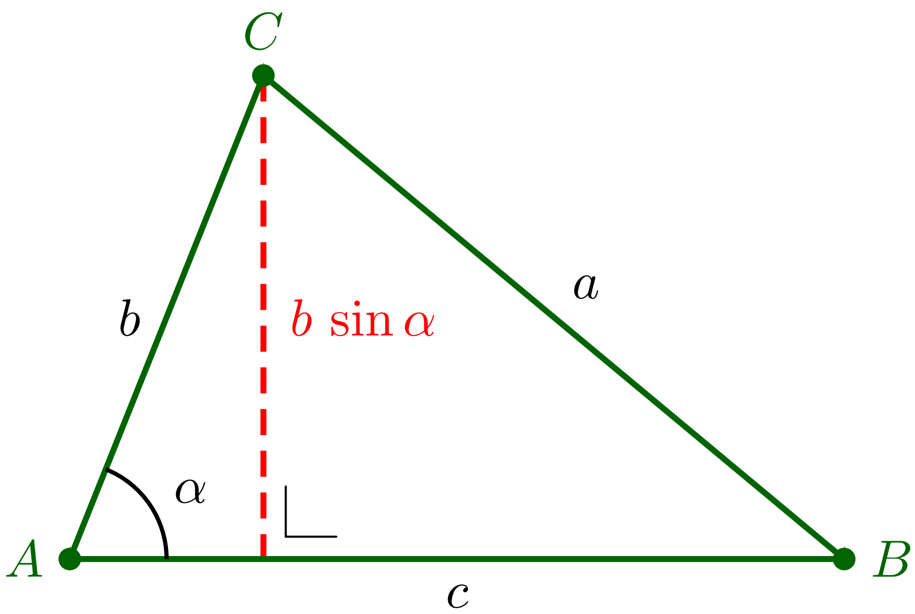
Meetkunde - Eigenschappen van een driehoek

Som van de hoeken: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

Pythagoras:

$$\triangle ABC \text{ rechthoekig in } A \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2$$

$$\begin{aligned} \text{Opp. } \triangle ABC &= \frac{\text{basis} \times \text{hoogte}}{2} \\ &= \frac{c \cdot h}{2} \\ &= \frac{1}{2} c \cdot b \sin \alpha \end{aligned}$$



Sinusregel:

$$\boxed{\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}}$$

Cosinusregel:

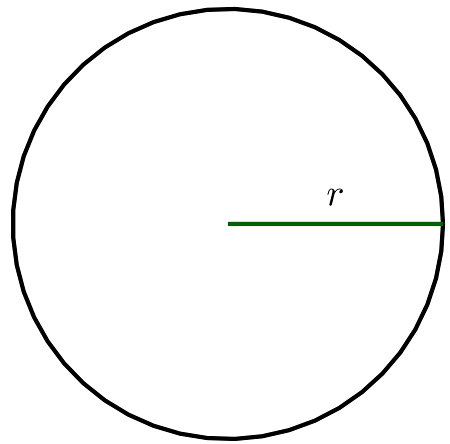
$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$$

Meetkunde - Eigenschappen van een cirkel

Cirkel met straal r:

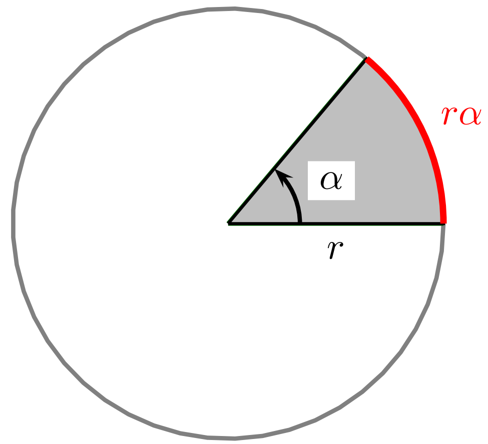
$$\text{omtrek} = 2\pi r$$
$$\text{oppervlakte} = \pi r^2$$

Als $r = 1$: omtrek 2π rad hoort bij 360°



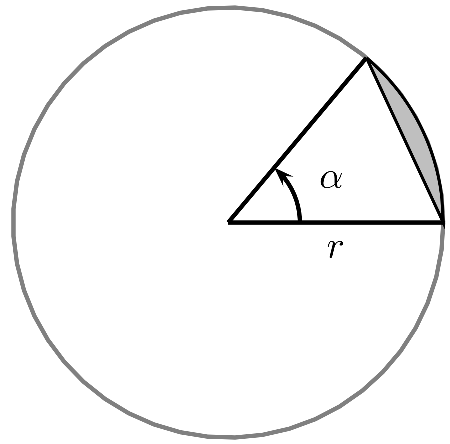
Cirkelsector met straal r en hoek α (rad):

$$\text{booglengte} = r\alpha$$
$$\text{oppervlakte} = \frac{1}{2} r^2\alpha$$



Cirkelsegment met straal r en hoek α:

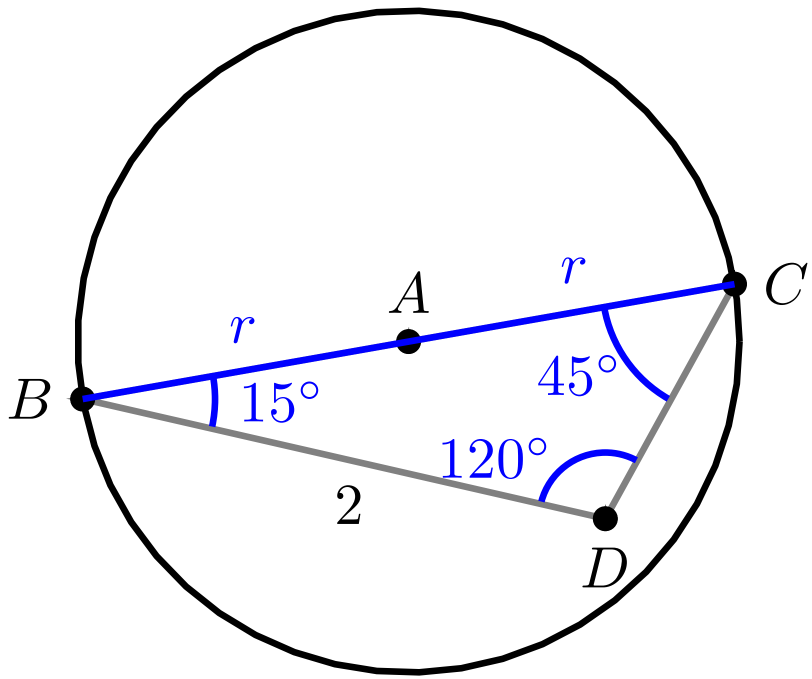
$$\text{oppervlakte} = \frac{1}{2} r^2\alpha - \frac{1}{2} r^2 \sin\alpha$$



Meetkunde - Eigenschappen van een cirkel

- **Voorbeeld 9**

  Bepaal de oppervlakte van deze cirkel met middelpunt A en waarbij $\hat{B} = 15^\circ$, $\hat{C} = 45^\circ$ en $|BD| = 2$.

  Oplossing

  Opp. $= \pi r^2$ maar wat is r?

  Sinusregel: $\dfrac{2r}{\sin 120^\circ} = \dfrac{2}{\sin 45^\circ}$

  $$\Rightarrow \quad \frac{2r}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{2}/2}$$

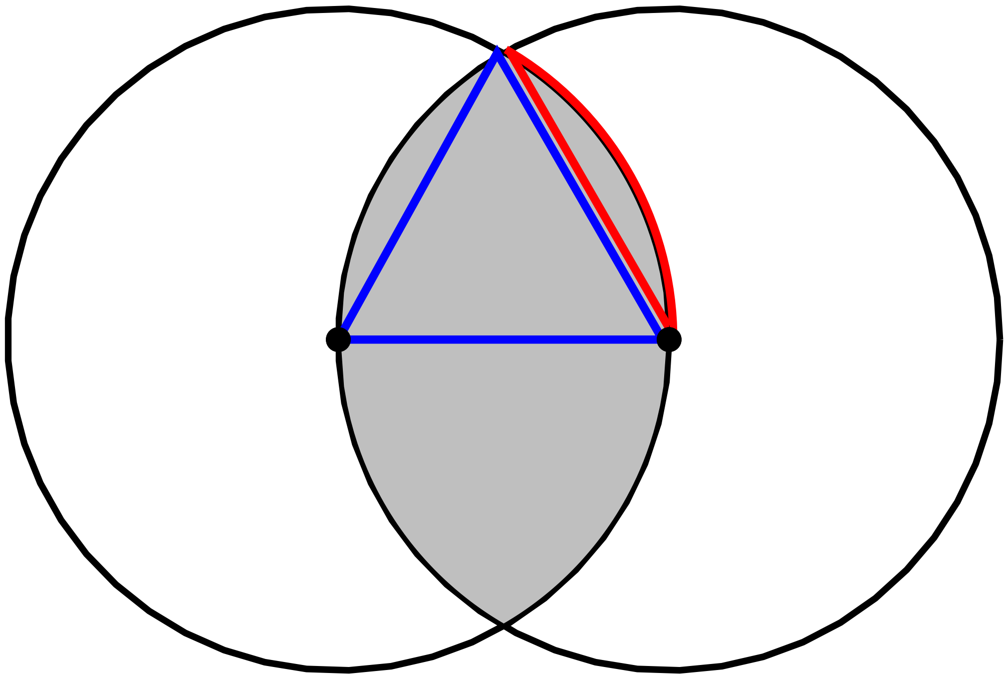
  $$\Rightarrow \quad \frac{4r}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

  $$\Rightarrow \quad r = \sqrt{3}/\sqrt{2}$$

  Antwoord Opp. $= \pi \left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \dfrac{3\pi}{2}$

- **Voorbeeld 10**
  Twee cirkels met straal 1 snijden elkaar doorheen elkaars middelpunten. Hoeveel bedraagt de gearceerde oppervlakte?

Oplossing



$$\text{Opp.}\blacksquare = \frac{1}{2}\,bc\sin\alpha = \frac{1}{2}\,1\cdot 1\cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Opp.}\blacksquare = \frac{1}{2}\,r^2\left(\alpha - \sin(\alpha)\right) = \frac{1}{2}\,1^2\left(\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Opp.}\square = 2\cdot\text{Opp.}\blacksquare + 4\cdot\text{Opp.}\blacksquare = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

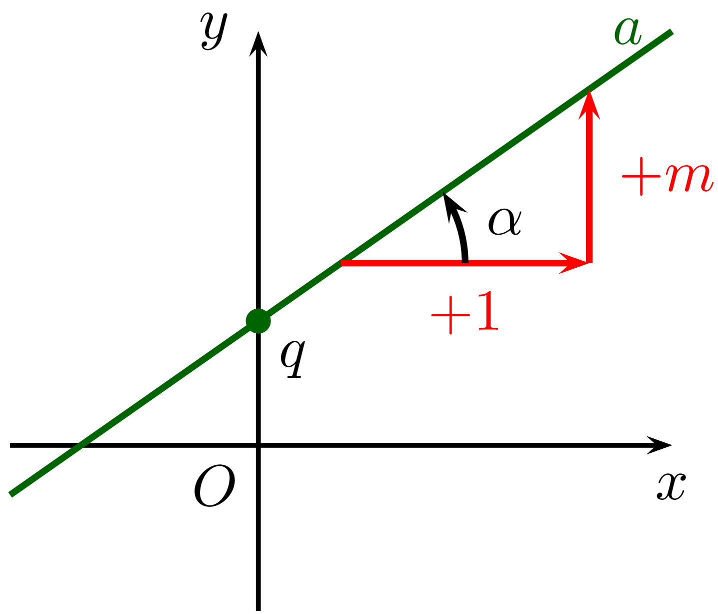
Meetkunde - Vergelijking van een rechte

De vergelijking van een rechte

- NIET evenwijdig met de y-as is:

$$\boxed{a : y = mx + q}$$

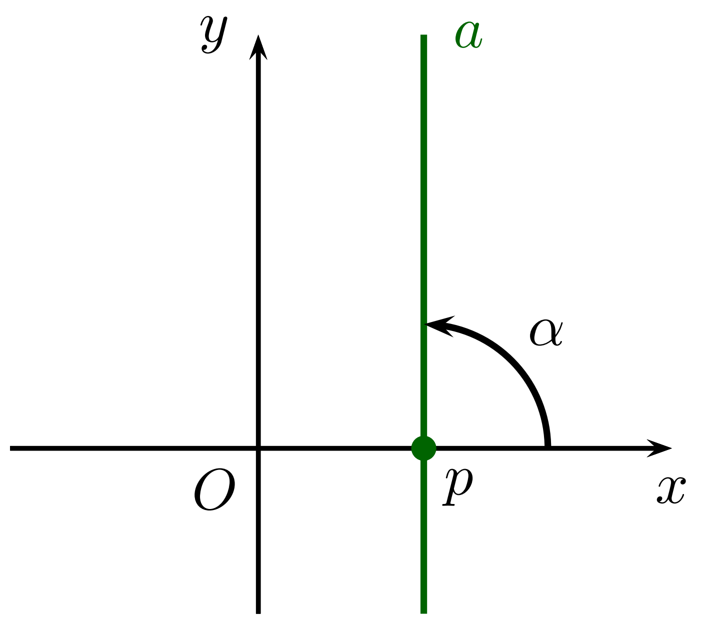
rico rechte: $m = \tan \alpha$
snijpunt y-as: $S(0, q)$



- WEL evenwijdig met de y-as is:

$$\boxed{a : x = p}$$

rico rechte: bestaat niet
hellingshoek $\alpha = 90^\circ$



Meetkunde - Vergelijking van een rechte

- **Voorbeeld 1 (opnieuw)**
  Welke waarden x voldoen aan de ongelijkheid $\left|x - \frac{5}{2}\right| < 2$

  (A) $x > \frac{1}{2}$

  (B) $x < \frac{1}{2}$

  (C) $x \in \left]\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right[$

  (D) $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$

  Oplossing Een ongelijkheid meetkundig oplossen?

  (1) Schets linkerlid

  $$y = x - \frac{5}{2}$$

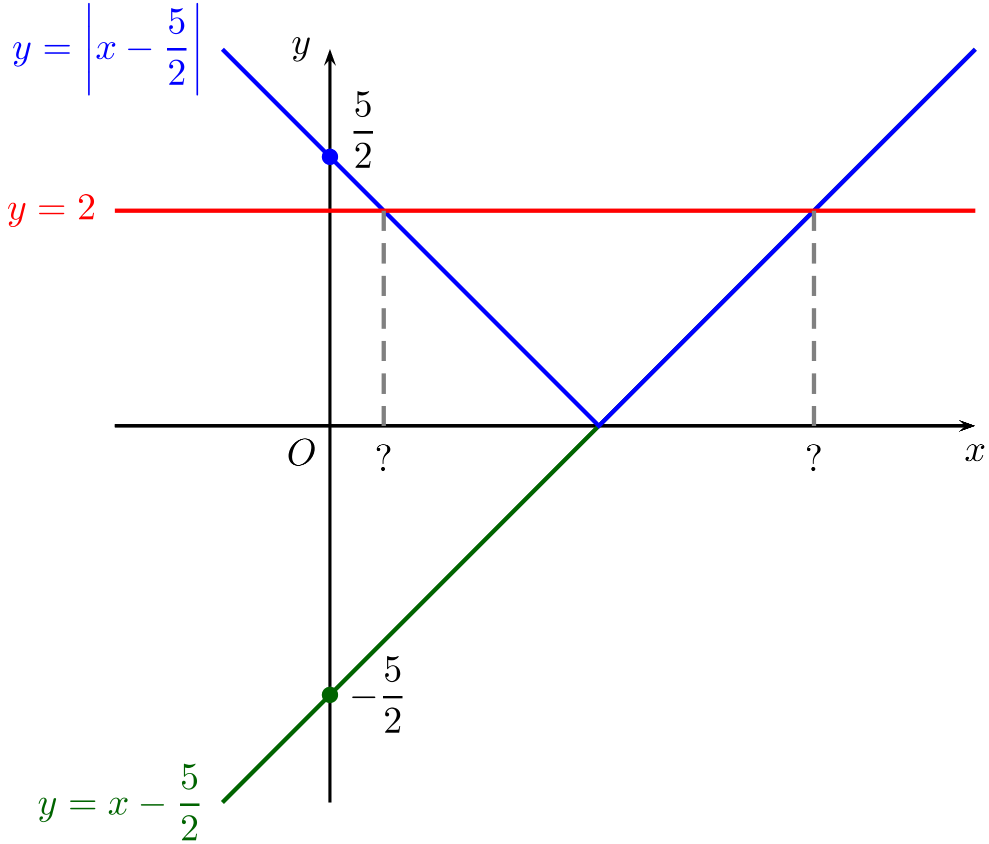
  $$y = \left|x - \frac{5}{2}\right|$$

  (2) Schets rechterlid

  $$y = 2$$

  (3) Lees snijpunten af

  Antwoord (C)



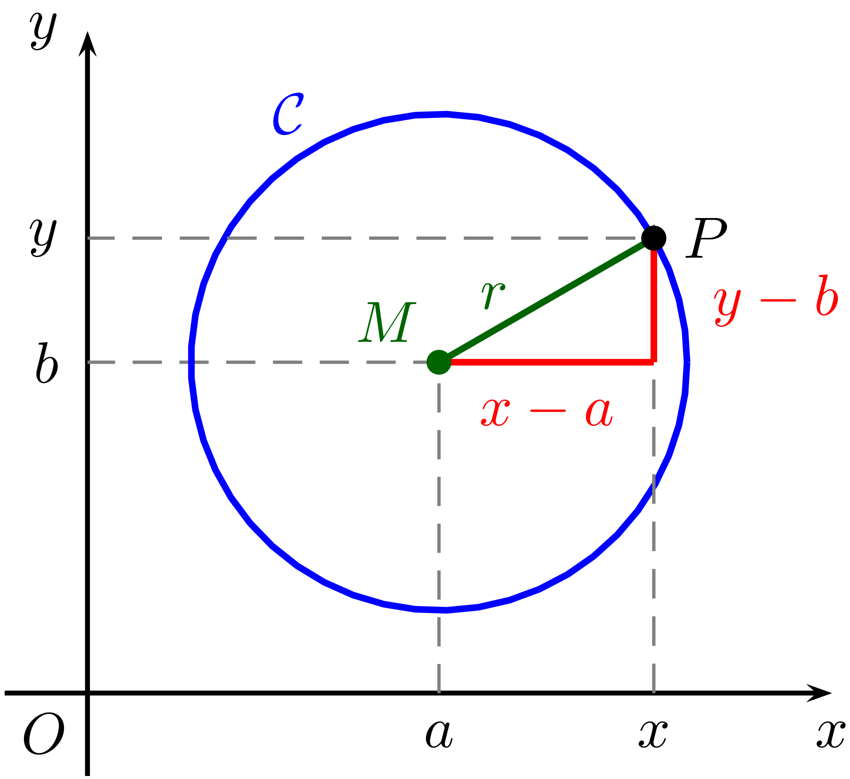
Meetkunde - Vergelijking van een cirkel

met middelpunt $M(a, b)$ en straal r is

$$\boxed{\mathcal{C} : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$$

Waarom?

$$\begin{aligned} P(x,y) \in \mathcal{C} \quad &\Leftrightarrow \quad |MP| = r \\ &\Leftrightarrow \quad |MP|^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad \text{Pythagoras} \end{aligned}$$



Meetkunde - Vergelijking van een cirkel

- **Voorbeeld 11** Wat is de straal van de cirkel met vergelijking

$$
\begin{aligned}
& 4x^2 - 16x + 4y^2 + 20y - 283 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 - 4x + y^2 + 5y - \frac{283}{4} = 0
\end{aligned}
$$

Oplossing De vergelijking is van de vorm

$$
\begin{aligned}
& (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0
\end{aligned}
$$

zodat

$$
\begin{cases} -4 = -2a \\ 5 = -2b \\ -\dfrac{283}{4} = a^2 + b^2 - r^2 \end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases} a = 2 \\ b = -\dfrac{5}{2} \\ -\dfrac{283}{4} = 2^2 + \left(-\dfrac{5}{2}\right)^2 - r^2 \end{cases}
$$

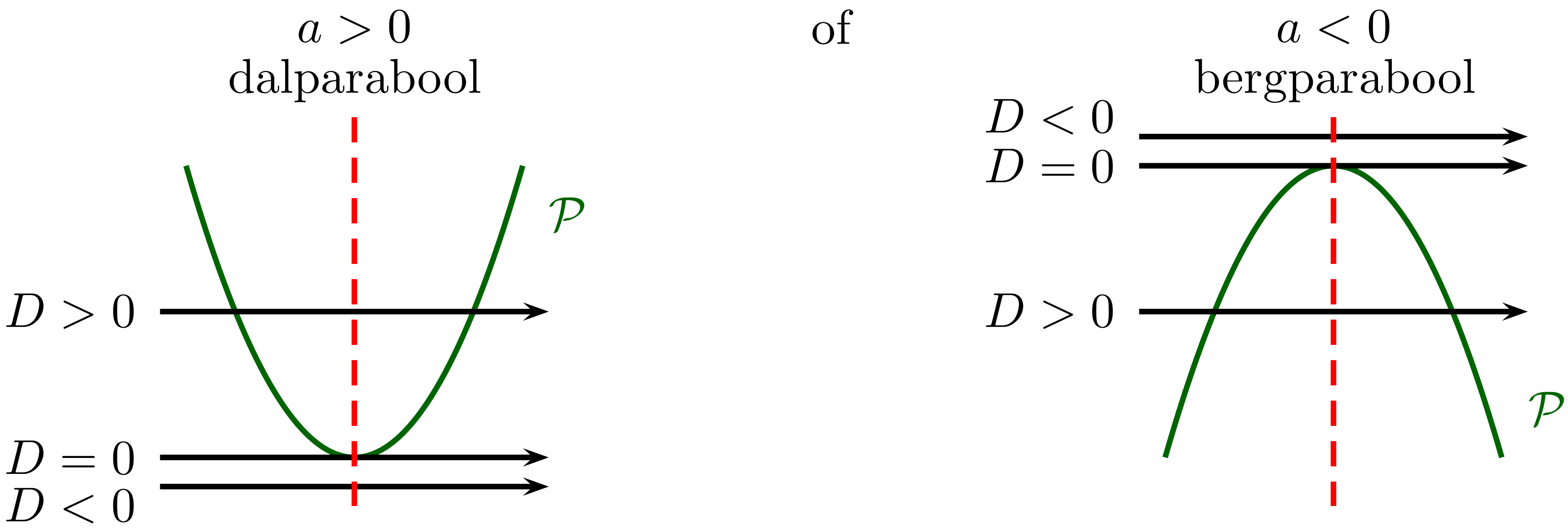
$$
\Rightarrow \quad r^2 = 81
$$

Antwoord De straal van de cirkel is 9

Meetkunde - Vergelijking van een parabool

met symmetrie-as evenwijdig met y-as:

$$\boxed{\mathcal{P} : y = ax^2 + bx + c}$$



vergelijking symmetrie-as: $x = -\dfrac{b}{2a}$, top: $T(x, f(x))$
snijpunten x-as: dan is

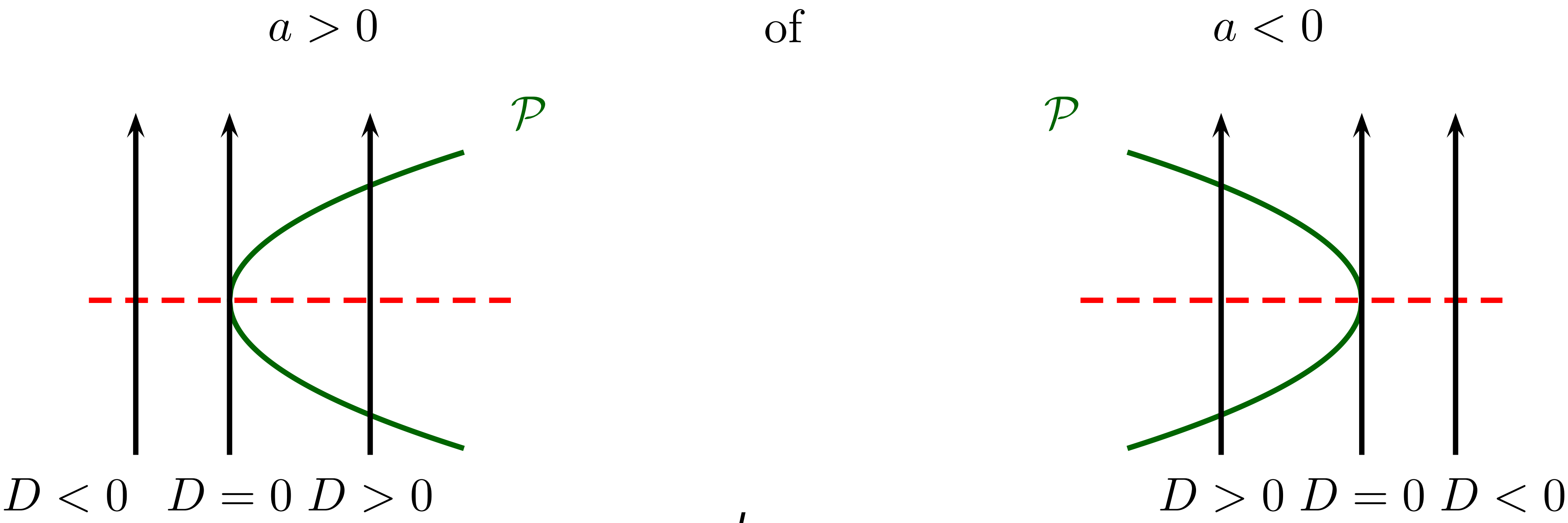
$$y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax^2 + bx + c = 0 \qquad \boxed{D = b^2 - 4ac}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \begin{cases} D > 0 : 2 \text{ snijpunten met } x\text{-as} \\ D = 0 : 1 \text{ snijpunt met } x\text{-as} \\ D < 0 : \text{ geen snijpunten met } x\text{-as} \end{cases}$$

Meetkunde - Vergelijking van een parabool

met symmetrie-as evenwijdig met x-as:

$$\boxed{\mathcal{P} : x = ay^2 + by + c}$$



vergelijking symmetrie-as: $y = -\dfrac{b}{2a}$, top: $T(f(y), y)$
snijpunten y-as: dan is

$$x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ay^2 + by + c = 0 \qquad \boxed{D = b^2 - 4ac}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \begin{cases} D > 0 : 2 \text{ snijpunten met } y\text{-as} \\ D = 0 : 1 \text{ snijpunt met } y\text{-as} \\ D < 0 : \text{ geen snijpunten met } y\text{-as} \end{cases}$$

Meetkunde - Vergelijking van een parabool

- **Voorbeeld 12** Na regressieanalyse van de waarnemingen was men in staat het percentage genezen mensen (A) uit te drukken in functie van de toegediende dosis (d) van een bepaald geneesmiddel:

$$A(d) = -d^2 + 2d + 3 \text{ met } 0 \leq d \leq 2.$$

Welke dosis van dit geneesmiddel is het meest effectief?

Oplossing

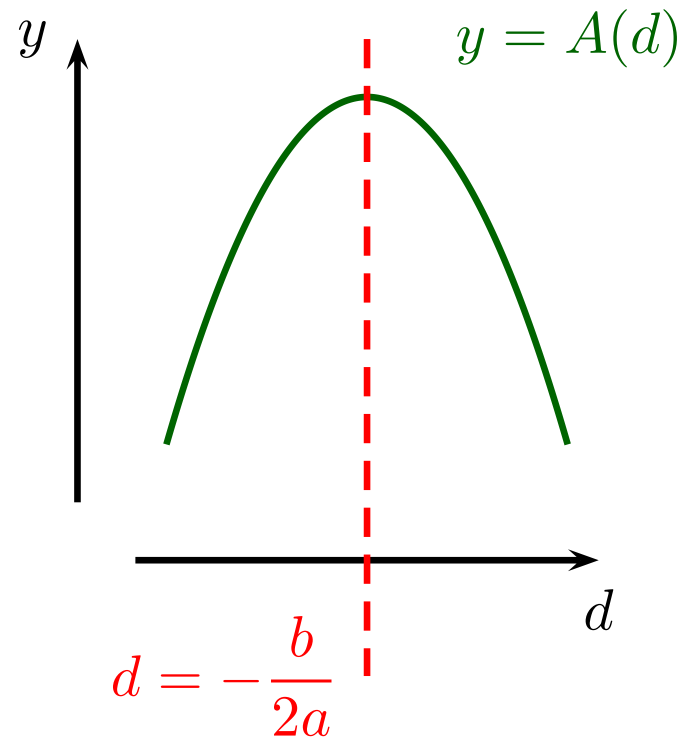
Gedaante $y = ax^2 + bx + c$ met $a < 0$

Gevraagd: dosis bij de top

Symmetrie-as:

$$d = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot (-1)} = 1$$

Antwoord $d = 1$



Meetkunde - Vergelijking van een parabool

- **Voorbeeld 13** We beschouwen de parabool met vergelijking $x = y^2 - 3y - 2$. Welke uitspraak klopt? De parabool

(A) raakt de y-as

(B) snijdt y-as eens boven en onder de x-as

(C) snijdt y-as niet

(D) snijdt y-as in twee punten boven de x-as

Oplossing

Snijpunten y-as: dan is

$$x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 - 3y - 2 = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} D &= (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) \\ &= 17 \end{aligned}}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \underbrace{\frac{3 + \sqrt{17}}{2}}_{>0} \text{ of } y = \underbrace{\frac{3 - \sqrt{17}}{2}}_{<0}$$

Antwoord (B)

Meetkunde - Vergelijking van een parabool

- **Voorbeeld 14** We beschouwen de parabool met vergelijking $x = y^2 - 3y - 2$. Welke uitspraak klopt? De parabool

(A) raakt de y-as

(B) snijdt y-as eens boven en onder de x-as

(C) snijdt y-as niet

(D) snijdt y-as in twee punten boven de x-as

Oplossing ALTERNATIEF

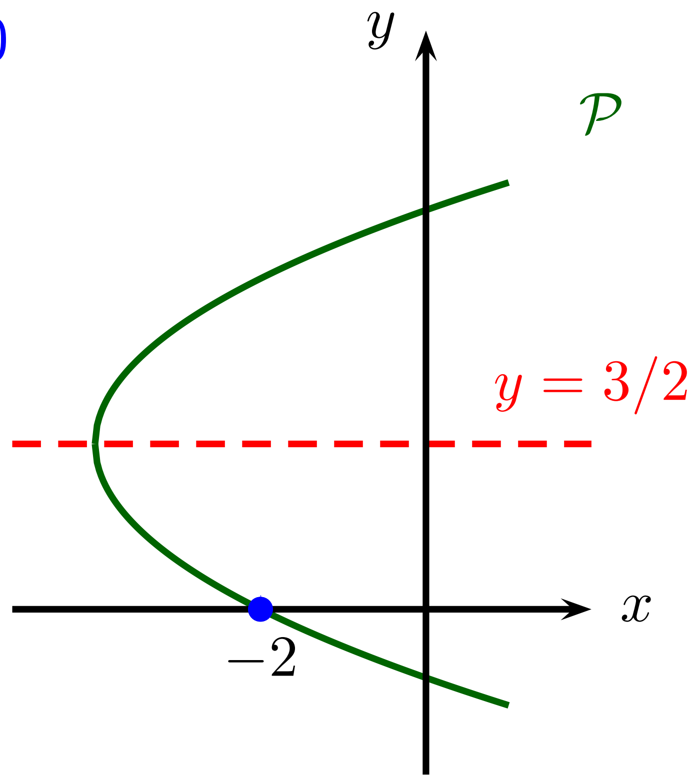
Gedaante $x = ay^2 + by + c$ met $a > 0$

Symmetrie-as: $y = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{3}{2}$

Snijpunt x-as: dan is

$$y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0^2 - 3 \cdot 0 - 2$$
$$= -2$$

Antwoord (B)

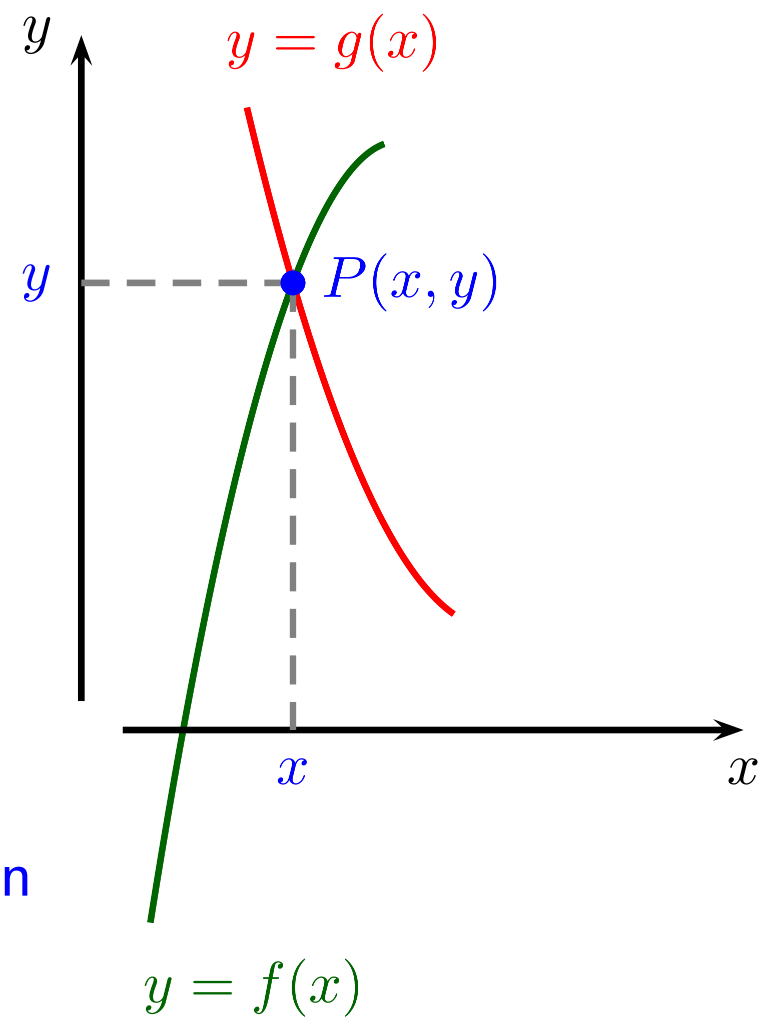


Meetkunde - Gemeenschappelijke punten

- **Voorbeeld 15** Hoeveel punten hebben de parabolen $y = -3x^2 + x + 5$ en $y = 2x^2 - 3x + 2$ gemeenschappelijk?

  Oplossing Grafieken van $y = f(x)$ en $y = g(x)$ hebben

$$
\begin{aligned}
& P(x, y) \text{ gemeenschappelijk} \\
\Leftrightarrow \quad & f(x) = g(x) \\
\Leftrightarrow \quad & -3x^2 + x + 5 = 2x^2 - 3x + 2 \\
\Leftrightarrow \quad & -5x^2 + 4x + 3 = 0 \\
& \boxed{\begin{aligned} D &= 4^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 3 \\ &= 76 > 0 \end{aligned}} \\
\Leftrightarrow \quad & x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{76}}{-10}
\end{aligned}
$$



Antwoord 2 gemeenschappelijke punten

Meetkunde - Gemeenschappelijke punten

- **Voorbeeld 16**

  Een rechte a die de y-as snijdt in $(0,4)$ heeft één punt gemeenschappelijk met de parabool $y = -2x^2 + 2$. De rechte is niet verticaal en niet parallel met $y = 4x$. Wat is de helling van die rechte?

  Oplossing

  (1) rechte niet evenwijdig met y-as dus $a : y = mx + q$

  (2) rechte niet parallel met $y = 4x$ dus $m \neq 4$

  (3) snijpunt y-as is $(0,4) = (0,q)$ dus $q = 4$

  (4) één punt gemeenschappelijk met parabool

  $$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad -2x^2 + 2 = mx + 4 \text{ heeft één oplossing} \\ &\Leftrightarrow \quad 2x^2 + mx + 2 = 0 \text{ heeft één oplossing} \\ &\Leftrightarrow \quad D = m^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad m = 4 \text{ of } m = -4 \end{aligned}$$

  Antwoord De helling is -4

Examenvragen

- **Juli 2016 - Vraag 8** Als $\cos x = \sin x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, dan is $\cos^3 x - \sin^3 x$ gelijk aan

(A) $\dfrac{4}{3\sqrt{3}}$ (C) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

(B) $\dfrac{3}{2\sqrt{3}}$ (D) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Oplossing Ontbinden in factoren:

$$\cos^3 x - \sin^3 x = \underbrace{(\cos x - \sin x)}_{1/\sqrt{3}}(\cos^2 x + \underbrace{\sin x \cos x}_{1/3} + \sin^2 x)$$

$$\underbrace{(\cos x - \sin x)^2}_{1/3} = \cos^2 x - 2\sin x \cos x + \sin^2 x$$

dus $2\sin x \cos x = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3\sqrt{3}}$$ dus antwoord (A).

- **Augustus 2016 - Vraag 8** In een orthonormaal assenstelsel is een cirkel met middelpunt $(0,0)$ en straal 1 gegeven. Vanuit het punt $A(-2,0)$ tekenen we de raaklijn r aan de cirkel. Het punt B is het snijpunt van de (positieve) x-as met de raaklijn s aan de cirkel loodrecht op r. Wat is de coördinaat van B?

(A) $\left(\frac{5\sqrt{3}}{6}, 0\right)$ (C) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}, 0\right)$

(B) $\left(\frac{4\sqrt{3}}{5}, 0\right)$ (D) $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$

Oplossing Raaklijn $\perp$ middellijn

Gelijkvormige driehoeken:

$\frac{?}{2} = \frac{1}{a} \Rightarrow ? = \frac{2}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (D)

Pythagoras:

$2^2 = a^2 + 1^2 \Rightarrow a = \sqrt{3}$