Voorbereidende sessie toelatingsexamen

Wiskunde 1 - Algebra
Procentberekening, evenredigheden en stelsels

Dr. Koen De Naeghel[1]

KU Leuven Kulak, woensdag 6 maart 2019

[1] Presentatie en opgeloste oefeningen zijn digitaal beschikbaar op http://www.koendenaeghel.be.

Inhoud

Leerstofafbakening

WISKUNDE

1. Algebra
   (a) bewerkingen met reële getallen en rekenregels
   (d) evenredigheid en omgekeerde evenredigheid
   (g) stelsels vergelijkingen van de eerste graad met hoogstens drie onbekenden

Algebra - Procentberekening

- **Voorbeeld 1** Bereken 16% van 1400.

  Oplossing Bereken $\frac{16}{100} \cdot 1400 = 16 \cdot 14 = 224$.

  $$\boxed{\text{Onthoud: } p\% \text{ van } A \text{ is } \frac{p}{100} \cdot A}$$

- **Voorbeeld 2** Hoeveel procent van 20 is 30?

  Oplossing Noem p het gevraagde procent. Welnu,

  $$p\% \text{ van } 20 \text{ is } 30$$
  $$\text{dus } \frac{p}{100} \cdot 20 = 30$$
  $$\text{dus } p = \frac{30 \cdot 100}{20} = 30 \cdot 5 = 150$$

  Antwoord 150% procent van 20 is 30.

Algebra - Procentberekening

- **Voorbeeld 3** Van welke hoeveelheid is 45% gelijk aan 9?

  Oplossing Noem A de gevraagde hoeveelheid. Welnu,

  $$\begin{aligned} & 45\% \text{ van } A \text{ is } 9 \\ \text{dus } & \frac{45}{100} A = 9 \\ \text{dus } & A = \frac{9 \cdot 100}{45} = \frac{100}{5} = 20 \end{aligned}$$

  Antwoord 45% van 20 is 9.

- **Voorbeeld 4** Een hoeveelheid B neemt toe met 18%. Wat is de nieuwe hoeveelheid?

  Oplossing De nieuwe hoeveelheid is

  $$\begin{aligned} B \text{ vermeerderd met } 18\% \text{ van } B, \text{ dus } & B + \frac{18}{100} B \\ \text{dus } & B + 0,18\, B \\ \text{dus } & B(1 + 0,18) \\ \text{dus } & 1,18\, B \end{aligned}$$

Algebra - Procentberekening

- **Voorbeeld 5** Een hoeveelheid C neemt af met 12%. Wat is de nieuwe hoeveelheid?

  Oplossing De nieuwe hoeveelheid is

  $$C \text{ verminderd met } 12\% \text{ van } C, \text{ dus } C - \frac{12}{100}\,C$$
  $$\text{dus } C - 0,12\,C$$
  $$\text{dus } C(1 - 0,12)$$
  $$\text{dus } 0,88\,C$$

- **Voorbeeld 6** Een hoeveelheid D werd verkregen door een toename van 164%. Wat is de oorspronkelijke hoeveelheid?

  Oplossing Noem de oorspronkelijke hoeveelheid A, dan is

  $$A \text{ vermeederd met } 164\% \text{ gelijk aan } D, \text{ dus } A + \frac{164}{100}\,A = D$$
  $$\text{dus } 2,64\,A = D$$
  $$\text{dus } A = \frac{D}{2,64}$$

Algebra - Evenredigheden en stelsels

- **Voorbeeld 7** Een labo heeft een zuuroplossing van 15% nodig. Er is echter alleen een 10% en een 30% oplossing voorhanden. Hoeveel liter van deze twee oplossingen moet men mengen om 10 liter van de 15% oplossing te verkrijgen?

  Oplossing

  Noem x het aantal liter nodig van de 10% oplossing, en
  y het aantal liter nodig van de 30% oplossing.

  Voor **elke** waarde van x en y voldoet het mengsel aan:

	aantal liter	hoeveelheid zuur
10% oplossing	x	$0,1 \cdot x$
30% oplossing	y	$0,3 \cdot y$
mengsel	$x + y$	$0,1 \cdot x + 0,3 \cdot y$

  Gevraagd is om 10 liter met 15% oplossing te maken, zodat

	aantal liter	hoeveelheid zuur
15% oplossing	10	$0,15 \cdot 10$

  Zo verkrijgen we het stelsel

  $$\begin{cases} x + y = 10 \\ 0,1x + 0,3y = 1,5 \end{cases} \quad \text{dus} \quad \begin{cases} x = 7,5 \text{ liter} \\ y = 2,5 \text{ liter} \end{cases}$$

Algebra - Evenredigheden en stelsels

- **Voorbeeld 8** Hoeveel liter van een 70% alcoholoplossing moet bij 50 liter van een 40% alcoholoplossing gemengd worden om een 50% alcoholoplossing te krijgen?

  Oplossing

  Noem x het aantal liter van de 70% oplossing.

  Voor **elke** waarde van x voldoet het mengsel aan:

	aantal liter	hoeveelheid alcohol
70% oplossing	x	$0,7 \cdot x$
40% oplossing	50	$0,4 \cdot 50$
mengsel	$x+50$	$0,7 \cdot x + 0,4 \cdot 50$

  Gevraagd is een mengsel te maken met 50% alcohol, zodat

	aantal liter	hoeveelheid alcohol
50% oplossing	$x+50$	$0,5 \cdot (x+50)$

  Zo verkrijgen we de vergelijking

$$\begin{aligned} & 0,7x + 0,4 \cdot 50 = 0,5(x+50) \\ \Rightarrow\quad & 7x + 200 = 5x + 250 \\ \Rightarrow\quad & x = 25 \text{ liter} \end{aligned}$$

Examenvragen

- **Juli 2016 - Vraag 12** Het stelsel $\begin{cases} x - y = 3 & (1) \\ cx + y = 4 & (2) \end{cases}$

  heeft een oplossing (x, y) in het eerste kwadrant als en slechts als

  (A) $-1 < c < \frac{4}{3}$

  (B) $0 < c < \frac{4}{3}$

  (C) $c > -1$

  (D) $c > \frac{4}{3}$

  Oplossing

  Zoek eerst elke oplossing (x, y). Uit $(1) + (2)$ volgt:

  $$cx + x = 7 \quad \Rightarrow \quad (c+1)x = 7 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{7}{c+1}.$$

  In (1) geeft:

  $$y = x - 3 = \frac{7}{c+1} - 3 = \frac{7 - 3(c+1)}{c+1} = \frac{4 - 3c}{c+1}.$$

  Een oplossing (x, y) in het eerste kwadrant als en slechts als

  $$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c + 1 > 0 \\ 4 - 3c > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c > -1 \\ c < \frac{4}{3} \end{cases} \quad \text{dus (A).}$$

Examenvragen

- **Augustus 2016 - Vraag 14** In onderstaande tabel staan de gemiddelde resultaten van de leerlingen uit twee scholen, kortweg met A en B aangeduid.

	A	B	A en B samen
Jongens	a, 71	b, 81	$a+b$, 79
Meisjes	c, 76	d, 90	$c+d$, ?
Alle leerlingen	$a+c$, 74	$b+d$, 84	

Wat is het gemiddelde van de meisjes van beide scholen samen?

(A) 85

(B) 84

(C) 83

(D) 82

Oplossing

$$\begin{cases} 71a+81b = 79(a+b) \\ 71a+76c = 74(a+c) \\ 81b+90d = 84(b+d) \\ 76c+90d = \ ?\ (c+d) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 4a \\ c = 3a/2 \\ d = b/2 = 2a \\ ? = \dfrac{76c+90d}{c+d} = 84 \text{ dus (B).} \end{cases}$$