BENADERINGEN VAN HET GETAL PI
DOORHEEN DE GESCHIEDENIS VAN DE WISKUNDE

KOEN DE NAEGHEL

Samenvatting. Doorheen de geschiedenis heeft men steeds betere technieken ontwikkeld om de waarde van π af te schatten. In dit overzichtsartikel laten we enkele van die benaderingen aan bod komen. In het bijzonder staan we stil bij de definitie van het getal π, hoe de formule voor oppervlakte van een cirkel bewezen wordt, de methode van Archimedes om π te benaderen met behulp van regelmatige veelhoeken en een benadering met behulp van de boogtangens. De aangereikte opbouw is geschikt voor leerlingen van het middelbaar onderwijs. Deze tekst is een onderdeel van een cursus wiskunde [2, pagina II-84].

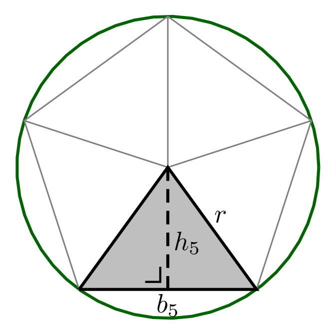
Inhoudsopgave

1. Definitie van het getal π, omtrek en oppervlakte van een cirkel

Het spreekt voor zich dat alle cirkels gelijkvormig zijn. Achter deze eenvoudige waarneming schuilt een diepzinnig resultaat: voor *alle* cirkels is de verhouding van de omtrek tot de diameter dezelfde. Deze constante[1] noemen we het getal π. Hieruit volgt dat de omtrek van een cirkel met straal r gelijk is aan $2\pi r$.

De oppervlakte van een cirkel met straal r kan gevonden worden door de oppervlakte van een ingeschreven regelmatige n-hoek te schrijven in functie van de omtrek van die n-hoek (zie rechterfiguur), en daarna de limiet te nemen voor $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned}
\text{opp. cirkel} &= \lim_{n\to+\infty} (\text{opp. } n\text{-hoek}) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\, h_n \times (\text{omtrek } n\text{-hoek}) \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n\to+\infty} h_n \times \lim_{n\to+\infty} (\text{omtrek } n\text{-hoek}) \\
&= \frac{1}{2}\, r \times 2\pi r = \pi r^2
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\text{opp. vijfhoek} &= 5 \times \text{opp. } \square \\
&= 5 \times \frac{b_5 \cdot h_5}{2} \\
&= \frac{1}{2}\, h_5 \times (\text{omtrek vijfhoek})
\end{aligned}$$

Om in de praktijk de omtrek of oppervlakte van een cirkel te berekenen moeten we een benadering voor de waarde van π kennen. Al in het oude Egypte kende men de benadering $\pi \approx (16/9)^2 = \mathbf{3,1}604\ldots$, correct tot op één decimaal. Doorheen de geschiedenis heeft men steeds betere technieken ontwikkeld om de waarde van π af te schatten.

Datum: 15 augustus 2013.

[1] Het getal π is *per definitie* gelijk aan C/D met C de omtrek van een willekeurige cirkel en D de diameter van die cirkel. Deze definitie en bovenstaande afleiding voor de omtrek en oppervlakte van een cirkel zijn afkomstig van Archimedes, waarbij we de door hem gebruikte 'uitputtingsmethode' vertaald hebben naar het hedendaags begrip 'limiet' . De notatie π werd ingevoerd door William Jones 1706 als afkorting voor 'perimeter', een synoniem voor omtrek [8].

2. De methode van Archimedes

In de klassieke oudheid benaderde Archimedes van Syracuse het getal π met behulp van ingeschreven en omgeschreven regelmatige veelhoeken. Voor een cirkel met straal 1 geldt (zie rechterfiguur):

$$\text{omtrek ingeschr. } n\text{-hoek} = 2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$
$$\text{omtrek omgeschr. } n\text{-hoek} = 2n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

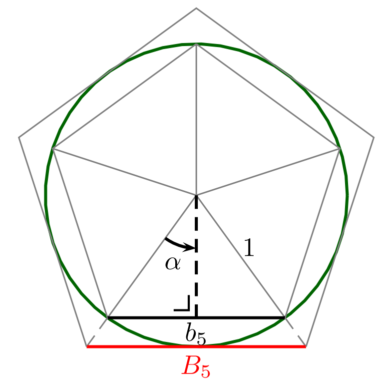
zodat voor elk natuurlijk getal $n > 3$ geldt[2]

$$n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) < \pi < n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Passen we deze ongelijkheden toe voor $n = 6$ dan vinden we alvast dat $3 < \pi < 6/\sqrt{3}$. Voor $n = 12$ berekenen we $\sin(\pi/12)$ en $\tan(\pi/12)$ met behulp van de formules van Carnot uit $\cos(\pi/6)$, waaruit

$$6\sqrt{2-\sqrt{3}} < \pi < 12\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

Herhalen we deze werkwijze voor $n = 24$, $n = 48$ en tenslotte $n = 96$ dan bekomen we uiteindelijk



$$\text{omtrek ingeschr. vijfhoek} = 5 \times b_5 = 5 \times 2\sin\alpha = 2\cdot 5\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$
$$\text{omtrek omgeschr. vijfhoek} = 5 \times B_5 = 2\cdot 5\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$48\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}} < \pi < 96\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}} \tag{1}$$

Berekenen we linker-en rechterlid, dan bekomen we $3,1410\ldots < \pi < 3,1425\ldots$. Door dit handmatig af te schatten tot eenvoudige ongelijkheden bewees Archimedes zijn genialiteit:

$$\boxed{3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70}}$$

Het gemiddelde van deze grenzen geeft een benadering $\pi \approx \mathbf{3,141}85\ldots$ die juist is tot op drie cijfers na de komma.

In de eeuwen daarna werd π berekend in India en China. Rond 265 gebruikte ook de Chinese wiskundige Liu Hui veelhoeken. Hij bedacht dat het verschil tussen de oppervlakte van een ingeschreven n-hoek en een ingeschreven $n/2$-hoek ongeveer gelijk is aan $1/4$, en dat hielp hem om π te schatten op $\mathbf{3,141}6$, een resultaat dat hij controleerde met de methode van Archimedes voor de in- en omgeschreven regelmatige 3072-hoek.

Tijdens de middeleeuwen bleken alle pogingen om deze benadering van π te verbeteren vruchteloos. Uiteindelijk slaagde François Viète 1579 er in om π te benaderen tot op 9 decimalen [3, p.56]. Hij deed dit door de methode van Archimedes toe te passen voor de regelmatige 393 216-hoek. Vermeldenswaardig is ook zijn ontdekking uit 1593 dat

$$\pi = 2\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}\cdot\ldots$$

wat bekend staat als het eerste ‘oneindig product’ in de geschiedenis van de wiskunde.

In 1580 vond[3] Adriaan van Roomen na jaren van rekenwerk een benadering tot op 20 decimalen. Hiervoor gebruikte hij een regelmatige 2^{30}-hoek. Zijn interesse in π was mede te danken aan het werk van zijn vriend Ludolph van Ceulen , degene die de methode van Archimes tot een climax bracht door met behulp van de regelmatige $6\cdot 2^{60}$-hoek het getal π te bepalen tot op 35 decimalen (1596, 1616). Na zijn dood heeft zijn vrouw de 35 decimalen in zijn grafsteen in de Leidse Pieterskerk laten beitelen, wat meteen de eerste wetenschappelijke publicatie op een grafsteen was. In de oudere Duitse literatuur, en tot op heden in Tsjechië en Slowakije, wordt het getal π aangeduid als ’getal van Ludolph’ ter ere van zijn levenswerk.

[2] Nemen we in de linkerongelijkheid de limiet voor $n \to +\infty$ dan verwijst dit naar het belangrijk resultaat $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

[3] Adriaan van Roomen was een Vlaamse arts en wiskundige, die ook bekend is onder zijn Latijnse naam Adrianus Romanus.

3. De reeksontwikkeling van de boogtangens

Elk van de benaderingen uit de vorige paragraaf zijn gebaseerd op ongelijkheden zoals (1), een streling voor het oog maar een nachmerrie voor de pen: men moest bij elke stap handmatig een vierkantswortel berekenen. Voor van Ceulen betekende dat 60 vierkantswortels berekenen, elk van hen nauwkeurig tot op 35 plaatsen na de komma.

Voor een alternatieve en meer efficiënte methode was het wachten op de verdere ontwikkeling van de wiskunde. In 1671 bewees[4] James Gregory dat de boogtangens kan geschreven worden als een 'oneindige som'

$$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{13}}{13} - \dots \qquad \text{voor } x \in [-1,1] \tag{2}$$

Stellen we $x = 1$ dan vinden we de zogenaamde reeks van Leibniz[5]

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \dots$$

Hoe merkwaardig dit resultaat ook moge zijn, omwille van de zogenaamde 'trage convergentie' doet het geen dienst om het getal π te benaderen: het optellen van de eerste 300 termen in het rechterlid geeft een slechts een benadering van π nauwkeurig tot op één cijfer na de komma [3, p.33].

Het was Leonhard Euler die in 1779 een algemene techniek bedacht om de reeksontwikkeling van de boogtangens (2) uit te buiten. Naarmate x dichter bij 0 ligt, zal de reeks 'sneller convergeren'. Anderzijds is het vermijden van vierkantswortels wenselijk, zodat de berekeningen tot een minimum herleid worden. Dat kan als volgt: nemen we twee hoeken $\alpha, \beta \in]-\pi/2, \pi/2[$ zodat $\alpha + \beta \neq \pi/2$ en stellen we $x = \tan\alpha$, $y = \tan\beta$ dan geeft de somformule

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \quad \Rightarrow \quad \tan(\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y) = \frac{x+y}{1-xy}$$

Indien $|\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y| < \pi/2$ dan volgt hieruit samenstellingsformule

$$\boxed{\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)} \tag{3}$$

Hierin koos Euler zorgvuldig de volgende waarden voor x en y:

- ▷ $x = 1/2$ en $y = 1/3$ zodat $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$
- ▷ $x = 1/2$ en $y = -1/7$ zodat $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)$
- ▷ $x = 1/3$ en $y = -1/7$ zodat $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{11}\right)$
- ▷ $x = 2/11$ en $y = -1/7$ zodat $\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{11}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{3}{79}\right)$

Aan elkaar rijgen van deze vier formules resulteert in de volgende formule van Euler

$$\boxed{\pi = 20\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right) + 8\operatorname{Arctan}\left(\frac{3}{79}\right)}$$

Gebruiken we slechts zes termen van de reeksontwikkeling van de boogtangens (2), dan bekomen we een benadering die correct is tot op 10 decimalen, beter dan Viète die daarvoor 17 genestte vierkantswortels moest berekenen:

$$\begin{aligned}\pi &= 20\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right) + 8\operatorname{Arctan}\left(\frac{3}{79}\right)\\ &\approx 20\left[\frac{1}{7} - \frac{(1/7)^3}{3} + \frac{(1/7)^5}{5} - \frac{(1/7)^7}{7} + \frac{(1/7)^9}{9} - \frac{(1/7)^{11}}{11}\right] + 8\left[\frac{3}{79} - \frac{(3/79)^3}{3} + \frac{(3/79)^5}{5} - \frac{(3/79)^7}{7} + \frac{(3/79)^9}{9} - \frac{(3/79)^{11}}{11}\right]\\ &= \mathbf{3,141\,592\,653\,5}74\dots\end{aligned}$$

Op deze manier kon Euler in slechts één uur tijd 20 decimalen van π berekenen, en deed daarmee zijn bijnaam 'de incarnatie van efficiëntie' alle eer aan [3, p.59].

Eerder vond John Machin 1706 op een soortgelijke maar specifieke manier de bekende formule van Machin (hoewel deze 'trager convergeert' dan de voorgenoemde reeks van Euler), waarmee hij π bepaalde tot op 100 decimalen

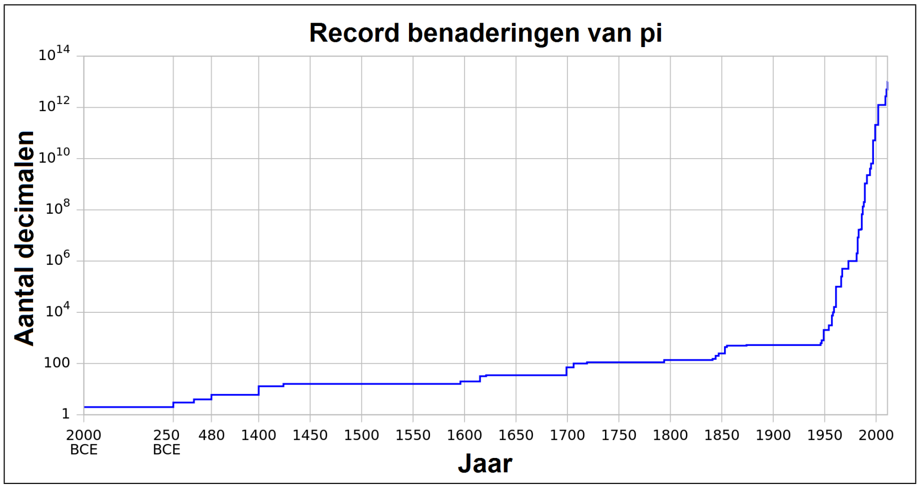
$$\boxed{\pi = 16\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - 4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)}$$

[4] De reeksontwikkeling voor $\operatorname{Arctan} x$ werd eerder beschreven door de Indische wiskundige Nilakantha Somayaji 1501 [3, p.34].

[5] Naar Gottfried Wilhelm Leibniz die in 1674 deze reeks onafhankelijk van de resultaten van Gregory en Nilakantha vond [3, p.34].

4. Record benaderingen van π en open vragen

Later kwamen soortgelijke, meer efficiënte formules aan het licht. In 1948, vlak voor de komst van computeralgebra, was π bekend tot op 808 decimalen. In 1949 gebruikten John Wrench and Levi Smith een rekenmachine om zo 1120 decimalen te bekomen. Later in dat jaar berekende de eerste computer ENIAC, onder leiding van John von Neumann , na 70 uur werktijd 2037 decimalen van π. De records, waarvoor men nog steeds steunde op de reeksontwikkeling van de boogtangens (2), volgden elkaar snel op: 7480 decimalen in 1957, 10 000 decimalen in 1958, 100 000 decimalen in 1961, 1 000 000 decimalen in 1973. Rond 1980 vond men nieuwe formules om π te berekenen. Onderstaande figuur heeft de evolutie van deze records weer [7, Pi].



In 2011 berekenden Alexander Yee and Shigeru Kondo π tot op 10 biljoen (10^{13}) decimalen [6],[7, Pi]. De berekening duurde 371 dagen en het werkgeheugen nam 44 terrabyte in beslag. De computer maakte gebruik van de formule van Chudnovsky, gevonden door broers David en Gregory Chudnovsky in 1987

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{10005}}{4270934400} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(6k)!}{(k!)^3(3k)!} \frac{(13591409 + 545140134k)}{640320^{3k}}$$

en de decimale ontwikkeling werd geverifieerd door onder andere de formule van Plouffe, ontdekt door[6] Simon Plouffe in 2006

$$\pi = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right)$$

Men kan zich de vraag stellen welk nut het heeft om zoveel decimalen van π te kennen. Voor dagelijks gebruik volstaat een handvol cijfers na de komma, en volgens Jörg Arndt and Christoph Haenel zijn 39 decimalen voldoende om de meeste kosmologische berekeningen uit te voeren: 39 decimalen volstaan om het volume van het universum te berekenen met een nauwkeurigheid tot op atoomschaal [1]. Het berekenen van decimalen vindt dan ook zijn motivatie in het testen van supercomputers, numerieke algoritmen en het voorzien van data om de willekeur in de decimalen van π te begrijpen. Zo is het tot op heden onbekend of π een zogenaamd normaal getal (in basis 10) is: komt in de decimale voorstelling van π elk cijfer voor met frequentie 1/10, elk tweetal cijfers voor met frequentie 1/100, elk drietal cijfers voor met frequentie 1/1000, etc.? In feite weten we zelfs niet of in de decimale voorstelling van π het cijfer 2 oneindig veel keer voorkomt [4, p.230].

Referenties

[1] J. Arndt, C. Haenel, *Pi Unleashed*, Springer Verlag, 2006.
[2] K. De Naeghel, *Wiskunde In zicht*, Lulu Press, Inc. 2013. Beschikbaar op `http://www.koendenaeghel.be`
[3] W. Dunham, *The calculus gallery*, Princeton University Press, 2005.
[4] J. Havil, *The irrationals*, Princeton University Press, 2012.
[5] Plouffe's Inverter, `http://pi.lacim.uqam.ca/eng/`
[6] Round 2... 10 Trillion Digits of Pi, `http://www.numberworld.org/misc_runs/pi-10t/details.html`
[7] Wikipedia, `http://en.wikipedia.org/` en `http://en.wikipedia.org/`
[8] S. Wolfram, *Mathematical Notation: Past and Future*, `http://www.stephenwolfram.com/publications/recent/mathml/mathml2.html`

Koen De Naeghel, Onze-Lieve-Vrouwecollege, Collegestraat 24, 8310 Brugge.
E-mail address: `koendenaeghel@hotmail.com`

[6] Plouffe is ook bekend voor Plouffe's Inverter [5] , een database dat meer dan 215 miljoen constanten uit de wiskunde bevat.