Uitgewerkte oefeningen

Algebra

Oefening 1 Gegeven is de ongelijkheid: $|4-3x| \leq 2$. Welke waarden voor x voldoen aan deze ongelijkheid?

(A) $x \geq \frac{2}{3}$

(B) $x \leq \frac{2}{3}$

(C) $x \in \left[\frac{4}{3}, 2\right]$

(D) $x \in \left[\frac{2}{3}, 2\right]$

Oplossing We werken de ongelijkheid uit:

$$\begin{aligned}
|4-3x| \leq 2 \quad &\Leftrightarrow \quad -2 \leq 4-3x \leq 2 \\
&\Leftrightarrow \quad -6 \leq -3x \leq -2 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{-6}{-3} \geq x \geq \frac{-2}{-3} \\
&\Leftrightarrow \quad 2 \geq x \geq \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Antwoord D

Oefening 2 Gegeven is de volgende gelijkheid: $\frac{-6-6x^2}{x^3+1} = \frac{p}{x+1} + \frac{qx-2}{x^2-x+1}$. Hoeveel bedraagt de waarde van $p \cdot q + q$?

(A) -6

(B) 0

(C) 6

(D) 10

Oplossing We herkennen een merkwaardig product en plaatsen beide breuken in het rechterlid op gelijke noemer:

$$\begin{aligned}
& \frac{-6-6x^2}{x^3+1} = \frac{p}{x+1} + \frac{qx-2}{x^2-x+1} \\
\Rightarrow \quad & \frac{-6-6x^2}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{p}{x+1} + \frac{qx-2}{x^2-x+1} \\
\Rightarrow \quad & \frac{-6-6x^2}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{p}{x+1} \cdot \frac{x^2-x+1}{x^2-x+1} + \frac{qx-2}{x^2-x+1} \cdot \frac{x+1}{x+1} \\
\Rightarrow \quad & -6-6x^2 = p(x^2-x+1) + (qx-2)(x+1) \\
\Rightarrow \quad & -6-6x^2 = px^2 - px + p + qx^2 + qx - 2x - 2 \\
\Rightarrow \quad & -6-6x^2 = (p+q)x^2 + (-p+q-2)x + p - 2 \\
\Rightarrow \quad & \begin{cases} -6 = p+q \\ -p+q-2 = 0 \\ -6 = p-2 \end{cases} \\
\Rightarrow \quad & \begin{cases} p = -4 \\ q = -2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Dan is $p \cdot q + q = -4 \cdot (-2) - 2 = 6$.

Antwoord C

Oefening 3 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x}{3-x}$. Welke functie is dan gelijk aan de uitdrukking $f(f(2-x))$?

(A) $\dfrac{2-x}{1+2x}$

(B) $\dfrac{2-x}{5+x}$

(C) $\dfrac{2-x}{1+x}$

(D) $\dfrac{2-x}{1+4x}$

Oplossing Omdat $f(\square) = \dfrac{\square}{3-\square}$ is $f(2-x) = \dfrac{2-x}{3-(2-x)} = \dfrac{2-x}{1+x}$ zodat:

$$\begin{aligned} f(f(2-x)) &= f\left(\frac{2-x}{1+x}\right) \\ &= \frac{\frac{2-x}{1+x}}{3-\frac{2-x}{1+x}} \\ &= \frac{\frac{2-x}{1+x}}{\frac{3(1+x)-(2-x)}{1+x}} \\ &= \frac{2-x}{1+x} \cdot \frac{1+x}{3+3x-2+x} \\ &= \frac{2-x}{1+4x}. \end{aligned}$$

Antwoord D

Oefening 4 Gegeven is de functie $f(x) = 5^{-x}$. Hoeveel bedraagt dan de waarde van de volgende uitdrukking?

$$\frac{f(x+1)\Big(f(x+1) - f(x+2)\Big)}{f(2x)}$$

(A) $10/4$

(B) $-1/4$

(C) $5/4$

(D) $4/125$

Oplossing Omdat $f(\square) = 5^{-\square}$ is:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+1)\Big(f(x+1) - f(x+2)\Big)}{f(2x)} &= \frac{5^{-(x+1)} \cdot \left(5^{-(x+1)} - 5^{-(x+2)}\right)}{5^{-2x}} \\ &= \frac{5^{-x-1} \cdot \left(5^{-x-1} - 5^{-x-2}\right)}{5^{-2x}} \\ &= \frac{5^{-x-1} \cdot 5^{-x-1} - 5^{-x-1} \cdot 5^{-x-2}}{5^{-2x}} \\ &= \frac{5^{-x-1-x-1} - 5^{-x-1-x-2}}{5^{-2x}} \\ &= \frac{5^{-2x-2} - 5^{-2x-3}}{5^{-2x}} \\ &= \frac{5^{-2x-2}}{5^{-2x}} - \frac{5^{-2x-3}}{5^{-2x}} \\ &= 5^{-2x-2+2x} - 5^{-2x-3+2x} \\ &= 5^{-2} - 5^{-3} \\ &= \frac{1}{25} - \frac{1}{125} = \frac{5}{125} - \frac{1}{125} = \frac{4}{125}. \end{aligned}$$

Antwoord D

Oefening 5 Gegeven is de vergelijking: $5^{2x-1} = 2^x$. Welke uitdrukking voor x is correct?

(A) $x = \dfrac{\ln 5}{2\ln 5 - \ln 2}$

(B) $x = \dfrac{\ln 5}{\ln 2 - 2\ln 5}$

(C) $x = \dfrac{\ln 2 - 2\ln 5}{\ln 5}$

(D) $x = \dfrac{2\ln 5 - \ln 2}{\ln 5}$

Oplossing We lossen de vergelijking op naar x:

$$\begin{aligned}
& 5^{2x-1} = 2^x \\
\Leftrightarrow\quad & \ln\left(5^{2x-1}\right) = \ln\left(2^x\right) \\
\Leftrightarrow\quad & (2x-1)\ln 5 = x\ln 2 \\
\Leftrightarrow\quad & 2x\ln 5 - \ln 5 = x\ln 2 \\
\Leftrightarrow\quad & 2x\ln 5 - x\ln 2 = \ln 5 \\
\Leftrightarrow\quad & x(2\ln 5 - \ln 2) = \ln 5 \\
\Leftrightarrow\quad & x = \frac{\ln 5}{2\ln 5 - \ln 2}.
\end{aligned}$$

Antwoord A

Oefening 6 De veelterm $6x^4 - 25x^3 + px^2 + 12qx - 6r$ is deelbaar door de veelterm $2x^3 - 7x^2 - 3x + 18$. Wat is de waarde van $p + q - r$?

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 5

Oplossing Omdat $6x^4 - 25x^3 + px^2 + 12qx - 6r$ deelbaar is door $2x^3 - 7x^2 - 3x + 18$ geldt:

$$\begin{aligned}
6x^4 - 25x^3 + px^2 + 12qx - 6r &= (2x^3 - 7x^2 - 3x + 18)\cdot(\ldots x + \ldots) \\
&= (2x^3 - 7x^2 - 3x + 18)\cdot\left(3x - \frac{r}{3}\right) \\
&= 6x^4 + \left(-21 - \frac{2r}{3}\right)x^3 + \left(-9 + \frac{7r}{3}\right)x^2 + (54 + r)x - 6r
\end{aligned}$$

zodat

$$\begin{cases} -25 = -21 - \dfrac{2r}{3} \\ p = -9 + \dfrac{7r}{3} \\ 12q = 54 + r \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} r = 6 \\ p = -9 + \dfrac{7\cdot 6}{3} = 5 \\ q = \dfrac{54+6}{12} = 5. \end{cases}$$

Op die manier vinden we dat $p + q - r = 5 + 5 - 6 = 4$.

Antwoord C

Oefening 7 We beschouwen de veelterm $f(x) = 2x^3 + px^2 + qx + r$. Deze veelterm is deelbaar door $x^2 - 1$ en de rest bij deling door $x - 3$ is 8. Geef de waarde van de uitdrukking $(p - r) \cdot q$.

(A) -20
(B) -10
(C) 10
(D) 20

Oplossing Omdat $f(x)$ deelbaar is door $x^2 - 1$ geldt:

$$\begin{aligned} f(x) = (x^2-1)\cdot(\ldots x + \ldots) \quad &\Rightarrow \quad \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(-1) = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \quad \begin{cases} 2 + p + q + r = 0 & (1) \\ -2 + p - q + r = 0 & (2). \end{cases} \end{aligned}$$

Anderzijds is de rest bij deling van $f(x)$ door $x - 3$ gelijk aan 8 zodat:

$$\begin{aligned} f(x) = (x-3)\cdot(\ldots x^2 + \ldots x + \ldots) + 8 \quad &\Rightarrow \quad f(3) = 8 \\ &\Rightarrow \quad 54 + 9p + 3q + r = 8 \quad (3). \end{aligned}$$

De drie vergelijkingen (1), (2) en (3) geven het stelsel:

$$\begin{cases} p + q + r = -2 \\ p - q + r = 2 \\ 9p + 3q + r = -46. \end{cases}$$

Verminderen we de eerste vergelijking met de tweede vergelijking dan verkrijgen we $2q = -4$ dus $q = -2$. Op die manier wordt het stelsel vereenvoudigd tot:

$$\begin{aligned} \begin{cases} p + r = 0 \\ 9p + r = -40. \end{cases} \quad &\Rightarrow \quad \begin{cases} r = -p \\ 9p - p = -40. \end{cases} \\ &\Rightarrow \quad \begin{cases} r = 5 \\ p = -5. \end{cases} \end{aligned}$$

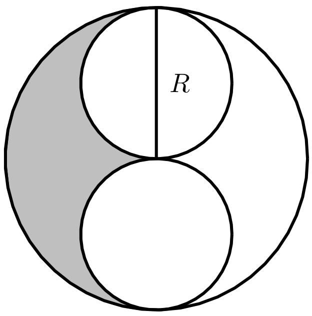
We vinden dat $(p - r) \cdot q = (-5 - 5) \cdot (-2) = 20$.

Antwoord D

Meetkunde

Oefening 8 Wat is de oppervlakte van het gearceerde gebied in de onderstaande figuur?

(A) $\dfrac{\pi R^2}{3}$
(B) $\dfrac{\pi R^2}{4}$
(C) $\dfrac{\pi R^2}{6}$
(D) R^2



Oplossing De grote cirkel heeft als straal R zodat diens oppervlakte gelijk is aan πR^2. De straal van een kleine cirkel is gelijk aan $R/2$ zodat de oppervlakte van zo'n kleine cirkel gelijk is aan $\pi(R/2)^2 = \pi R^2/4$.

De gearceerde oppervlakte is nu gelijk aan:

$$\begin{aligned} \frac{\text{opp. grote cirkel} - 2 \times \text{opp. kleine cirkel}}{2} &= \frac{\pi R^2 - 2 \cdot \pi R^2/4}{2} \\ &= \frac{\pi R^2 - \pi R^2/2}{2} \\ &= \frac{\pi R^2/2}{2} \\ &= \frac{\pi R^2}{4}. \end{aligned}$$

Antwoord B

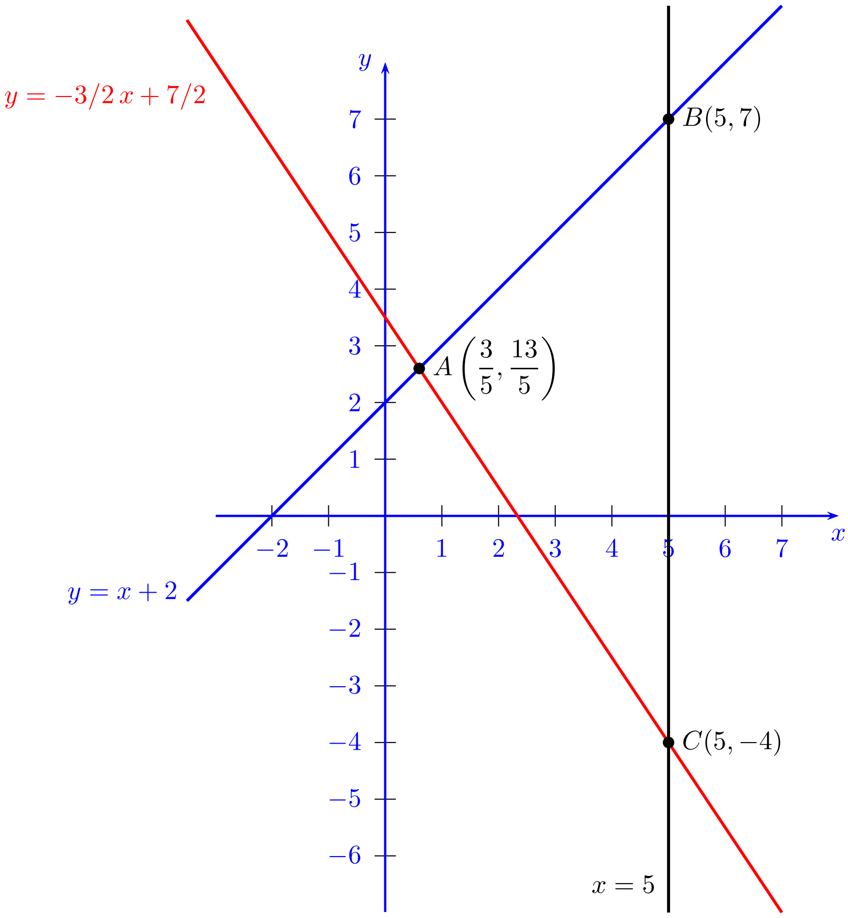
Oefening 9 Wat is de oppervlakte van de driehoek die zich bevindt tussen de rechten met vergelijkingen $y = x + 2$, $2y = -3x + 7$ en $x = 5$?

(A) 81/5
(B) 111/5
(C) 121/5
(D) 201/5

Oplossing We zoeken eerst de coördinaten van de drie hoekpunten van de driehoek. De coördinaat van het snijpunt A van de rechten $y = x + 2$ en $2y = -3x + 7$ voldoet aan het stelsel:

$$\begin{cases} y = x+2 \\ 2y = -3x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+2 \\ -3x+7 = 2(x+2) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x+2 \\ 5x = 3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3/5 \\ y = 13/5. \end{cases}$$

Het snijpunt van de rechten $y = x + 2$ en $x = 5$ is gelijk aan $B(5, 7)$ en het snijpunt van de rechten $2y = -3x + 7$ en $x = 5$ is gelijk aan $C(5, -4)$. Tekenen we deze drie rechten in een assenstelsel, dan verkrijgen we de volgende figuur:



Nemen we in de driehoek ABC als basis het lijnstuk $[BC]$ en hoogte h dan verkrijgen we:

$$\begin{aligned} \text{opp } \Delta ABC &= \frac{\text{basis} \times \text{hoogte}}{2} \\ &= \frac{|BC| \cdot h}{2} \\ &= \frac{(7-(-4)) \cdot (5-3/5)}{2} \\ &= \frac{11 \cdot 22/5}{2} \\ &= 11 \cdot 11/5 = 121/5. \end{aligned}$$

Antwoord C

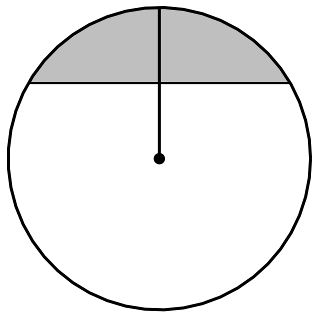
Oefening 10 Een cirkel heeft een straal van 1. Er wordt door een middelloodlijn op de straal een cirkelsegment afgesneden. Dit segment is gearceerd in de figuur. Hoeveel bedraagt de oppervlakte?

(A) $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(B) $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

(D) $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{8}$

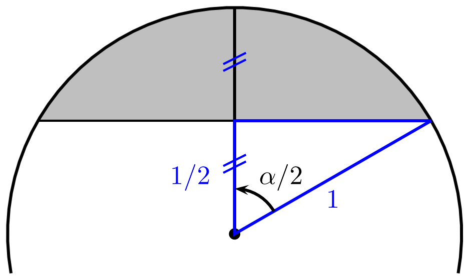


Oplossing De formule voor de oppervlakte van een cirkelsegment is:

$$\text{opp.}\,\blacksquare = \frac{1}{2} r^2 (\alpha - \sin\alpha)$$

waarbij r de straal van de cirkel is en α de middelpuntshoek (in radialen). In deze oefening is de straal van de cirkel gelijk aan $r = 1$. Rest ons nog om de middelpuntshoek α (in radialen) te bepalen.

De koorde (of basis) van het cirkelsegment gaat door het middel van de straal, zodat we in de figuur twee zijden van een rechthoekige driehoek kennen.



In deze rechthoekige driehoek kunnen we de cosinus van de halve middelpuntshoek berekenen:

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$$

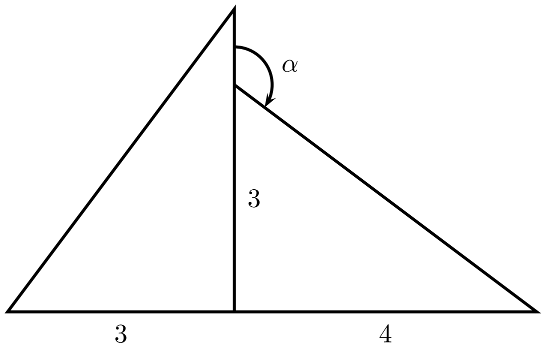
waaruit volgt dat $\alpha/2 = 60^\circ = \pi/3$. Op die manier vinden we dat $\alpha = 2\pi/3$ zodat:

$$\begin{aligned}
\text{opp.}\,\blacksquare &= \frac{1}{2} r^2 (\alpha - \sin\alpha) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3} - \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \\
&= \frac{2\pi}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}.
\end{aligned}$$

Antwoord C

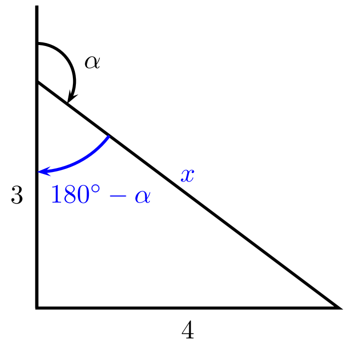
Oefening 11 In volgende figuur rusten twee rechthoekige driehoeken tegen elkaar. Bereken de sinus van de aangegeven hoek α.

(A) $\sin\alpha = 4/5$
(B) $\sin\alpha = 3/4$
(C) $\sin\alpha = -3/4$
(D) $\sin\alpha = 3/5$



Oplossing In de figuur duiden we $180° - \alpha$, de supplementaire hoek van α, aan. Uit de rechthoekige driehoek aan de rechterkant volgt nu dat:

$$\sin(180° - \alpha) = \frac{4}{x}.$$



Wegens de stelling van Pythagoras is $3^2 + 4^2 = x^2$ zodat $x = 5$. Op die manier vinden we dat:

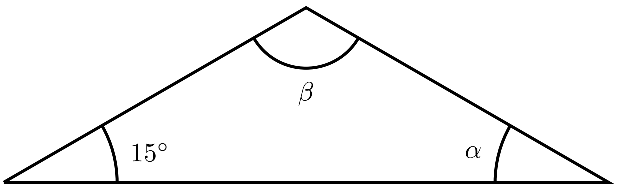
$$\sin(180° - \alpha) = \frac{4}{5}.$$

Omdat $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ (verwante hoeken) besluiten we dat $\sin\alpha = 4/5$.

Antwoord A

Oefening 12 We beschouwen een gelijkbenige driehoek. De figuur toont de tophoek β en de basishoeken 15° en α. Welke uitdrukking over de hoeken α en β is correct?

(A) $\sin\alpha - \sin\beta \geq 0$
(B) $\sin\beta - \cos\alpha \geq 0$
(C) $\cos\alpha - \cos\beta \geq 0$
(D) $\cos\beta - \sin\alpha \geq 0$



Oplossing Omdat de driehoek gelijkbenig is, zijn de basishoeken gelijk zodat $\alpha = 15°$. De som van de hoeken van een driehoek is 180° zodat:

$$15° + \beta + 15° = 180°$$

waaruit volgt dat $\beta = 150°$. Door de hoeken $\alpha = 15°$ en $\beta = 150°$ voor te stellen op een goniometrische cirkel, zien we in dat $\cos\beta < 0$ en $\cos\alpha > 0$ zodat $\cos\alpha - \cos\beta \geq 0$ correct is.

Antwoord C

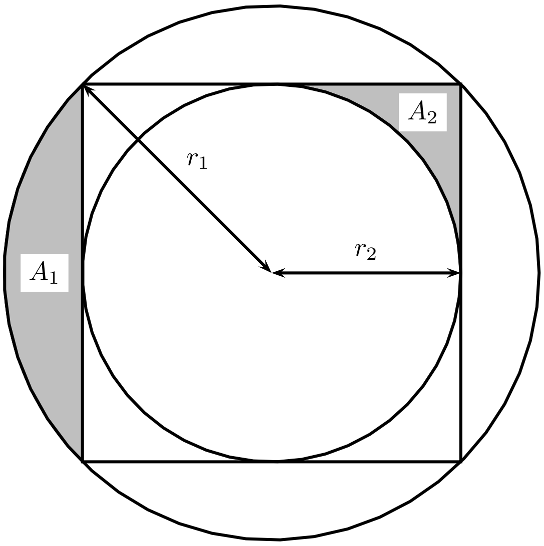
Oefening 13 Gegeven is de volgende figuur van een vierkant en twee cirkels. Hoeveel bedraagt de verhouding r_1/r_2 en wat kan men zeggen over de grootte van de gearceerde oppervlakten A_1 en A_2?

(A) $\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{3}$ en $A_1 > A_2$

(B) $\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{2}$ en $A_1 > A_2$

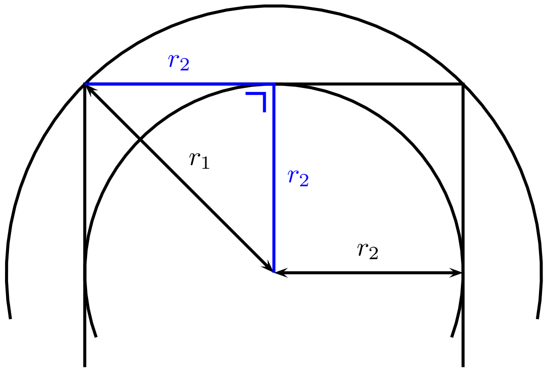
(C) $\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{2}$ en $A_1 < A_2$

(D) $\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{3}$ en $A_1 < A_2$



Oplossing Passen we de stelling van Pythagoras toe op de aangeduide rechthoekige driehoek in nevenstaande figuur, dan vinden we:

$$r_1^2 = r_2^2 + r_2^2 \quad \Rightarrow \quad r_1^2 = 2r_2^2$$
$$\Rightarrow \quad \frac{r_1^2}{r_2^2} = 2$$
$$\Rightarrow \quad \frac{r_1}{r_2} = \sqrt{2}.$$



Verder kunnen we de oppervlakte A_2 berekenen door de oppervlakte van het vierkant te verminderen met de oppervlakte van de binnenste cirkel:

$$4 \cdot A_2 = (2r_2)^2 - \pi r_2^2 \quad \Rightarrow \quad A_2 = r_2^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

Omdat $\pi \approx 3,2$ is $A_2 \approx 0,2\, r_2^2$.

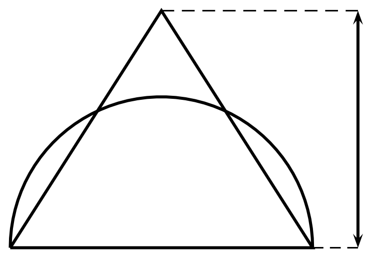
Daarnaast kunnen we de oppervlakte A_1 bepalen als het verschil van de oppervlakte van de buitenste cirkel en de oppervlakte van het vierkant:

$$4 \cdot A_1 = \pi r_1^2 - (2r_2)^2 = \pi 2 r_2^2 - (2r_2)^2 \quad \Rightarrow \quad A_1 = r_2^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Gebruiken we opnieuw de schatting $\pi \approx 3,2$ dan vinden we $A_1 \approx 0,6\, r_2^2$. Hieruit volgt dat $A_1 > A_2$.

Antwoord B

Oefening 14 We beschouwen een halve cirkel met straal R (bovenste figuur). De driehoek die erop getekend wordt, heeft dezelfde oppervlakte als de halve cirkel en heeft hoogte h_1. We vervormen de figuur nu zodat we twee driehoeken hebben die samen dezelfde oppervlakte hebben als de halve cirkel (onderste figuur). Deze driehoeken hebben hoogte h_2. Welke bewering is juist?

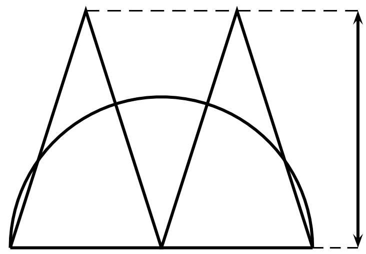


(A) $2h_2 < 3R$ en $2h_1 < 3R$

(B) $2h_2 < 3R$ en $2h_1 > 3R$

(C) $2h_2 > 3R$ en $2h_1 < 3R$

(D) $2h_2 > 3R$ en $2h_1 > 3R$



Oplossing In de eerste figuur is de basis van de driehoek $2R$. Uitdrukken dat de oppervlakte van de driehoek gelijk is aan de oppervlakte van de halve cirkel geeft:

$$\frac{(2R)\cdot h_1}{2} = \frac{1}{2}\pi R^2 \quad \Rightarrow \quad h_1 = \frac{\pi R}{2}.$$

In de tweede figuur is de basis van elke driehoek gelijk aan R. Zeggen dat de oppervlakte van de twee driehoeken gelijk is aan de oppervlakte van de halve cirkel leidt tot:

$$\frac{R\cdot h_2}{2} + \frac{R\cdot h_2}{2} = \frac{1}{2}\pi R^2 \quad \Rightarrow \quad h_2 = \frac{\pi R}{2}.$$

Hieruit volgt dat $h_1 = h_2 = \pi R/2$ zodat:

$$2h_1 = 2h_2 = \pi R > 3R.$$

Antwoord D

Oefening 15 Wat is de straal van de cirkel met vergelijking $x^2 - 6x + y^2 - 4y = 36$?

(A) 6
(B) 7
(C) 9
(D) 36

Oplossing De vergelijking van een cirkel is van de vorm:

$$\begin{aligned} & (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0 \end{aligned}$$

zodat voor de gegeven cirkel $x^2 - 6x + y^2 - 4y - 36 = 0$ geldt dat:

$$\begin{cases} -6 = -2a \\ -4 = -2b \\ a^2 + b^2 - r^2 = -36 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ 9 + 4 - r^2 = -36 \end{cases}$$

waaruit volgt dat $r^2 = 49$, dus $r = 7$.

Antwoord B

Oefening 16 De vergelijking $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 9 = 0$

(A) stelt geen cirkel voor

(B) stelt een cirkel voor met straal 3

(C) stelt een cirkel voor met straal 5

(D) stelt een cirkel voor met straal 9

Oplossing De vergelijking van een cirkel is van de vorm

$$\begin{aligned} & (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0 \end{aligned}$$

zodat voor de gegeven cirkel $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 9 = 0$ geldt dat

$$\begin{cases} -10 = -2a \\ -6 = -2b \\ a^2 + b^2 - r^2 = 9 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \\ 25 + 9 - r^2 = 9 \end{cases}$$

waaruit volgt dat $r^2 = 25$, dus $r = 5$.

Antwoord C

Oefening 17 Beschouw de vergelijking van de cirkel: $x^2 + y^2 - 2bx + c = 0$. Het punt $(5, 3)$ ligt op deze cirkel en de straal van de cirkel is 3. Hoeveel bedraagt de som van de parameters b en c?

(A) 8

(B) 11

(C) 21

(D) 84

Oplossing Enerzijds behoort het punt $P(5, 3)$ tot de cirkel, zodat de coördinaten van P voldoen aan de vergelijking van de cirkel:

$$5^2 + 3^2 - 10b + c = 0 \quad \Rightarrow \quad -10b + c = -34 \quad (1).$$

Anderzijds is de vergelijking van een cirkel van de vorm:

$$\begin{aligned} & (x-p)^2 + (y-q)^2 = 3^2 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 2px + p^2 + y^2 - 2qy + q^2 - 9 = 0 \end{aligned}$$

zodat voor de gegeven cirkel $x^2 + y^2 - 2bx + c = 0$ geldt dat:

$$\begin{cases} -2b = -2p \\ 0 = -2q \\ p^2 + q^2 - 9 = c \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p = b \\ q = 0 \\ p^2 + q^2 - 9 = c \end{cases} \quad \Rightarrow \quad b^2 - 9 = c \quad (2).$$

De twee vergelijkingen (1) en (2) geven het stelsel:

$$\begin{cases} -10b + c = -34 \\ b^2 - 9 = c. \end{cases}$$

De eerste vergelijking herschrijven we als $c = 10b - 34$. Substitutie in de tweede vergelijking geeft de tweedegraadsvergelijking:

$$\begin{aligned} b^2 - 9 = 10b - 34 \quad & \Rightarrow \quad b^2 - 10b + 25 = 0 \\ & \qquad \boxed{D = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 0} \\ & \Rightarrow \quad b = \frac{-(-10) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = 5 \end{aligned}$$

en uit de eerste vergelijking volgt nu $c = 10 \cdot 5 - 34 = 16$. De som van de parameters b en c is dus gelijk aan $b + c = 5 + 16 = 21$.

Antwoord C

Oefening 18 Beschouw de vergelijking van de cirkel: $y^2 - 3y + x^2 + x = 0$. Wat is de coördinaat van het middelpunt?

(A) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

(B) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

(C) $(-1, 3)$

(D) $(1, -3)$

Oplossing Noemen we (a, b) de coördinaat van het middelpunt en r de straal van de cirkel dan is de vergelijking van de vorm:

$$\begin{aligned} & (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \\ \Leftrightarrow\quad & x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0. \end{aligned}$$

Vergelijken met $y^2 - 3y + x^2 + x = 0$ geeft dan:

$$\begin{cases} 1 = -2a \\ -3 = -2b \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases}$$

waaruit volgt dat de coördinaat van het middelpunt gelijk is aan $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Antwoord A

Oefening 19 Gegeven is de vergelijking van een cirkel: $ax^2 + ay^2 + bx + cy - 6 = 0$. De punten $(-1, 0)$, $(3, -3)$ en $(0, 3)$ liggen op deze cirkel. Welke uitspraak over de coëfficiënten is correct?

(A) $a = -1$

(B) $b = -5$

(C) $c = 1$

(D) $c = 5$

Oplossing Omdat de drie punten op de cirkel liggen, voldoen hun coördinaten aan de vergelijking van de cirkel:

$$\begin{cases} a \cdot (-1)^2 + a \cdot 0^2 + b \cdot (-1) + c \cdot 0 - 6 = 0 \\ a \cdot 3^2 + a \cdot (-3)^2 + b \cdot 3 + c \cdot (-3) - 6 = 0 \\ a \cdot 0^2 + a \cdot 3^2 + b \cdot 0 + c \cdot 3 - 6 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a - b - 6 = 0 \\ 9a + 9a + 3b - 3c - 6 = 0 \\ 9a + 3c - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} a - b = 6 \\ 6a + b - c = 2 \\ 3a + c = 2. \end{cases}$$

Om dit lineair stelsel op te lossen, kunnen we als volgt te werk gaan. Uit de eerste vergelijking volgt dat $b = a - 6$. Uit de derde vergelijking vinden we $c = 2 - 3a$. Vervangen in de tweede vergelijking geeft dan:

$$6a + (a - 6) - (2 - 3a) = 2 \quad \Rightarrow \quad 10a = 10$$

zodat $a = 1$. Uit de eerste en de derde vergelijking volgt nu dat $b = 1 - 6 = -5$ en $c = 2 - 3 \cdot 1 = -1$.

Antwoord B

Oefening 20 Wat is de top van de parabool met vergelijking $y = 2x^2 - 8x + 15$?

(A) $(2, 7)$
(B) $(2, 11)$
(C) $(-2, 39)$
(D) $(8, -9)$

Oplossing Schrijven we de vergelijking van de parabool in de gedaante $f(x) = ax^2 + bx + c$ dan wordt de top gegeven door $T\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$. Hier is $a = 2$, $b = -8$ en $c = 15$ zodat:

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2 \cdot 2} = 2$$

en

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(2) = 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 15 = 7.$$

De top van de parabool is dus gelijk aan $T(2, 7)$.

Antwoord A

Oefening 21 In welk kwadrant ligt de top van de parabool met vergelijking $3x = 5y^2 + 6y + 7$?

(A) I
(B) II
(C) III
(D) IV

Oplossing Schrijven we de vergelijking van de parabool in de gedaante $f(y) = ay^2 + by + c$ dan wordt de top gegeven door $T\left(f\left(-\frac{b}{2a}\right), -\frac{b}{2a}\right)$. Hier is $a = 5/3$, $b = 2$ en $c = 7/3$ zodat:

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot 5/3} = -\frac{3}{5} < 0$$

en

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(-3/5) = 5/3 \cdot (-3/5)^2 + 2 \cdot (-3/5) + 7/3 = 3/5 - 6/5 + 7/3 = 26/15 > 0.$$

Omdat de x-coördinaat positief is en de y-coördinaat negatief is, ligt de top in het vierde kwadrant.

Antwoord D

Oefening 22 We beschouwen de volgende tweedegraadsfunctie: $y(x) = 2x^2 + ax + 18$. Men weet dat deze functie slechts één nulpunt heeft. Welke waarde(n) kan de parameter a hebben?

(A) $a = 0$
(B) $a = 3$ en $a = -3$
(C) $a = 6$ en $a = -6$
(D) $a = -12$ en $a = 12$

Oplossing De nulpunten van de functie zijn de snijpunten van de grafiek met de x-as. We vinden:

$$y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + ax + 18 = 0.$$

De eis is dus dat de vergelijking $2x^2 + ax + 18 = 0$ precies één oplossing heeft. Dat betekent dat de discriminant gelijk is aan nul, dus:

$$D = a^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18 = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 144$$

waaruit volgt dat $a = 12$ of $a = -12$.

Antwoord D

Oefening 23 Gegeven is de vergelijking van een parabool: $y = ax^2 + ax + 4$. Als $x = 2$ een nulpunt is van deze functie, hoeveel bedraagt dan de waarde van parameter a?

(A) $-2/3$

(B) $2/3$

(C) $-3/2$

(D) $3/2$

Oplossing De nulpunten van de functie zijn de snijpunten van de grafiek met de x-as. We vinden:

$$y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax^2 + ax + 4 = 0.$$

Zeggen dat $x = 2$ een nulpunt is, betekent dat $a \cdot 2^2 + a \cdot 2 + 4 = 0$, dus $a = -4/6 = -2/3$.

Antwoord A

Oefening 24 De verspreiding van een virus volgt een mathematische functie. Het aantal infecties in functie van de tijd in dagen wordt gegeven als: $y(t) = at^2 + bt + a$. Na 2 dagen zijn er 3 geïnfecteerde mensen, na 3 dagen zijn er dat 7. Na hoeveel dagen zullen er 31 geïnfecteerden zijn?

(A) 4 dagen

(B) 5 dagen

(C) 6 dagen

(D) 7 dagen

Oplossing Na t dagen zijn er $y(t) = at^2 + bt + a$ geïnfecteerde mensen. De gegevens laten zich dus vertalens als:

$$\begin{aligned}
\begin{cases} y(2) = 3 \\ y(3) = 7 \end{cases} \quad &\Rightarrow \quad \begin{cases} a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + a = 3 \\ a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + a = 7 \end{cases} \\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} 5a + 2b = 3 \\ 10a + 3b = 7. \end{cases}
\end{aligned}$$

Om dit lineair stelsel op te lossen, kunnen we als volgt te werk gaan: verminderen we de tweede vergelijking met het dubbele van de eerste vergelijking dan verkrijgen we $10a + 3b - 2(5a + 2b) = 7 - 2 \cdot 3$. Hieruit volgt dat $b = -1$. Invullen in de eerste vergelijking geeft dan $a = 1$. Op die manier vinden we dat $y(t) = at^2 + bt + a = t^2 - t + 1$.

We zoeken het tijdstip t waarvoor het aantal geïnfecteerde mensen gelijk is aan 31, dus:

$$\begin{aligned}
y(t) = 31 \quad &\Leftrightarrow \quad t^2 - t + 1 = 31 \\
&\Leftrightarrow \quad t^2 - t - 30 = 0 \\
&\qquad \boxed{D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30) = 121} \\
&\Leftrightarrow \quad t = \frac{-(-1) \pm \sqrt{121}}{2 \cdot 1} \\
&\Leftrightarrow \quad t = 6 \quad \text{of} \quad t = -5.
\end{aligned}$$

Antwoord C

Oefening 25 Gegeven zijn drie functies:

- parabool: $y = -2x^2 + 2x$
- rechte 1: $y = -2x$
- rechte 2: $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{2}{9}$

Zoek alle snijpunten of raakpunten van deze twee rechten met de parabool. Hoeveel bedraagt de som van de x-coördinaten van deze snijpunten of raakpunten?

(A) 5/3
(B) 0
(C) 7/3
(D) 1/3

Oplossing We bepalen de gemeenschappelijke punten van de parabool en rechte 1:

$$\begin{aligned} -2x^2 + 2x = -2x \quad &\Leftrightarrow \quad -2x^2 + 4x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x(-2x+4) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{of} \quad -2x + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{of} \quad x = 2. \end{aligned}$$

Vervolgens zoeken we de gemeeschappelijke punten van de parabool en rechte 2:

$$\begin{aligned} -2x^2 + 2x = \frac{2}{3}x + \frac{2}{9} \quad &\Leftrightarrow \quad -18x^2 + 18x = 6x + 2 \\ &\Leftrightarrow \quad -18x^2 + 12x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -9x^2 + 6x - 1 = 0 \\ & \quad\quad \boxed{D = 6^2 - 4 \cdot (-9) \cdot (-1) = 0} \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (-9)} = \frac{-6}{-18} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

De som van de x-coördinaten van deze gemeenschappelijke punten is dus $0 + 2 + 1/3 = 7/3$.

Antwoord C

Oefening 26 Eerste bewering:

De vergelijking $y^2 - 6y + 1 = 4x$ stelt een parabool voor met top $(-2, 3)$.

Tweede bewering:

De vergelijking $y^2 + x^2 - 6y + 4x + 4 = 0$ stelt een parabool voor met top $(-2, 3)$.

(A) Beide beweringen zijn juist.
(B) Alleen de eerste bewering is juist.
(C) Alleen de tweede bewering is juist.
(D) Beide beweringen zijn onjuist.

Oplossing We controleren de eerste bewering. De vergelijking $y^2 - 6y + 1 = 4x$ kan in de vorm $x = ay^2 + by + c$ worden geschreven en stelt dus een parabool voor. De top wordt gegeven door $T\left(f\left(-\dfrac{b}{2a}\right), -\dfrac{b}{2a}\right)$. Hier is $a = 1/4$, $b = -6/4 = -3/2$ en $c = 1/4$ zodat:

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-3/2}{2 \cdot 1/4} = 3$$

en

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(3) = \frac{1}{4} \cdot 3^2 - \frac{3}{2} \cdot 3 + \frac{1}{4} = -2.$$

De coördinaat van de top is dus gelijk aan $(-2, 3)$. We besluiten dat de eerste bewering juist is.

Vervolgens gaan we de tweede bewering na. De vergelijking $y^2 + x^2 - 6y + 4x + 4 = 0$ kan niet in de vorm $x = ay^2 + by + c$ of $y = ax^2 + bx + c$ geschreven worden en stelt dus geen parabool voor. De tweede bewering is onjuist.

Antwoord B

Oefening 27 We beschouwen de vergelijking van een cirkel en van een parabool:

$$y^2 - 4y + x^2 - 2x - 11 = 0 \quad \text{en} \quad y = x^2 - 2x + 1.$$

Welke van de volgende beweringen is verkeerd?

(A) De top van de parabool ligt op de x-as.

(B) Het middelpunt van de cirkel ligt op $(1, 2)$.

(C) De straal van de cirkel is 16.

(D) De parabool heeft twee snijpunten met de cirkel.

Oplossing We gaan op zoek naar een bewering die verkeerd is.

De top van de parabool wordt gegeven door $T\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$. Hier is $a = 1$, $b = -2$ en $c = 1$ zodat:

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$$

en

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0.$$

De coördinaat van de top is dus gelijk aan $(1, 0)$. Omdat de y-coördinaat van de top gelijk aan nul is, ligt de top van de parabool op de x-as. We besluiten dat bewering (A) juist is.

Noemen we (a, b) de coördinaat van het middelpunt van de cirkel en r de straal van de cirkel dan is de vergelijking van de vorm:

$$\begin{aligned} & (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0. \end{aligned}$$

Vergelijken met $y^2 - 4y + x^2 - 2x - 11 = 0$ geeft dan:

$$\begin{cases} -4 = -2b \\ -2 = -2a \\ a^2 + b^2 - r^2 = -11 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b = 2 \\ a = 1 \\ r = 4. \end{cases}$$

Dus de coördinaat van het middelpunt van de cirkel is gelijk aan $(1, 2)$ en de straal van de cirkel is 4. Dus bewering (B) is juist maar bewerking (C) is verkeerd.

Antwoord C

Oefening 28 We beschouwen de volgende veeltermfunctie: $y = x^3 + ax^2 + 9x$. Men weet dat deze functie slechts één nulpunt heeft. Welke waarden kan de parameter a aannemen?

(A) $-6 > a > 6$

(B) $-6 < a < 6$

(C) $-\sqrt{6} < a < \sqrt{6}$

(D) $a = -3$ en $a = 3$

Oplossing De nulpunten van de functie zijn de snijpunten van de grafiek met de x-as. We vinden:

$$\begin{aligned} y = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^3 + ax^2 + 9x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x(x^2 + ax + 9) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{of} \quad x^2 + ax + 9 = 0. \end{aligned}$$

De eis is dus dat de vergelijking $x^3 + ax^2 + 9x = 0$ precies één oplossing heeft. Omdat $x = 0$ een oplossing is, mag de tweedegraadsvergelijking $x^2 + ax + 9 = 0$ geen oplossingen hebben. Met andere woorden: de discriminant van $x^2 + ax + 9 = 0$ moet negatief zijn:

$$\begin{aligned} D < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a^2 < 36 \\ &\Leftrightarrow \quad -6 < a < 6. \end{aligned}$$

Antwoord B

Oefening 29 In een onderzoek gaat men het verband na tussen onverwachte mortaliteit (y) en het gemiddelde aantal uren slaap (x) van deze personen. Dit verband wordt gegeven door de volgende best passende functie: $y = 100x^2 - 1500x + 600$. Bij welk gemiddeld aantal uren slaap was in dit onderzoek de mortaliteit het kleinst?

(A) $6,5$ uur

(B) 7 uur

(C) $7,5$ uur

(D) 8 uur

Oplossing De functie is van de gedaante $y = ax^2 + bx + c$ met $a > 0$ dus de grafiek van deze functie is een dalparabool. De mortaliteit is dus het kleinst in de top van deze parabool. De x-coördinaat van de top is gelijk aan:

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-1500}{2 \cdot 100} = \frac{15}{2} = 7,5.$$

Antwoord C