Uitgewerkte oefeningen

Rekenen met procenten en evenredigheden

Oefening 1 Een patiënt had vorig jaar een cholesterol van 160 mg/dl. Een jaar later is zijn cholesterol met 15% toegenomen. Wat is zijn cholesterol nu?

Oplossing De hoeveelheid cholesterol nu is 160 vermeerderd met 15% van 160, dus

$$160 + \frac{15}{100}160 = 160 + \frac{15 \cdot 16}{10} = 160 + \frac{240}{10} = 160 + 24 = 184.$$

Antwoord De hoeveelheid cholesterol nu is 184 mg/dl.

Oefening 2 Een patiënt heeft 95 mg/dl glucose in zijn bloed. Na een jaar is zijn glucose toegenomen tot 114 mg/dl. Met hoeveel procent is zijn glucose toegenomen?

Oplossing Noem p het gevraagde procent. De hoeveelheid glucose na een jaar is dan gelijk aan

$$\begin{aligned}
& 95 + \frac{p}{100} \cdot 95 = 114 \\
\Rightarrow\quad & 95 + \frac{p \cdot 19}{20} = 114 \\
\Rightarrow\quad & \frac{p \cdot 19}{20} = 19 \\
\Rightarrow\quad & p = 20.
\end{aligned}$$

Antwoord Zijn glucose is met 20% toegenomen.

Oefening 3 Een andere patiënt heeft nuchter 114 mg/dl glucose in het bloed. Door medicatie is zijn glucose afgenomen tot 95 mg/dl. Met hoeveel procent is zijn glucose afgenomen?

Oplossing Noem p het gevraagde procent. Na afname is de hoeveelheid glucose dan gelijk aan

$$\begin{aligned}
& 114 - \frac{p}{100} \cdot 114 = 95 \\
\Rightarrow\quad & 114 - \frac{p \cdot 57}{50} = 95 \\
\Rightarrow\quad & \frac{p \cdot 57}{50} = 19 \\
\Rightarrow\quad & p = \frac{50 \cdot 19}{57} = \frac{50}{3} \approx \frac{51}{3} = 17.
\end{aligned}$$

Antwoord Zijn glucose is met ongeveer 17% afgenomen.

Oefening 4 Als een handelaar de prijs van een product met $p\%$ verhoogd, met hoeveel procent moet hij dan de nieuwe prijs verlagen om weer op de oorspronkelijke prijs te komen?

(A) $\dfrac{p}{1-\frac{p}{100}}$

(B) p

(C) $\dfrac{100p}{100-p}$

(D) $\dfrac{100p}{100+p}$

Oplossing Noem A de oorspronkelijke prijs. Na een prijsverhoging van $p\%$ is de nieuwe prijs gelijk aan

$$A+\frac{p}{100}\cdot A=A\left(1+\frac{p}{100}\right).$$

Noem x het procent waarmee hij de nieuwe prijs moet verlagen om weer op de oorspronkelijke prijs te komen. Dan is

$$\begin{aligned}
&\text{nieuwe prijs} - x\% \text{ van de nieuwe prijs} = \text{oorspronkelijke prijs}\\
\Rightarrow\ &\text{nieuwe prijs} - \frac{x}{100}\times \text{nieuwe prijs} = \text{oorspronkelijke prijs}\\
\Rightarrow\ &\text{nieuwe prijs} \times\left(1-\frac{x}{100}\right) = \text{oorspronkelijke prijs}
\end{aligned}$$

zodat

$$\begin{aligned}
&A\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{x}{100}\right)=A\\
\Rightarrow\ &\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{x}{100}\right)=1\\
\Rightarrow\ &1-\frac{x}{100}=\frac{1}{1+\frac{p}{100}}\\
\Rightarrow\ &100-x=\frac{100}{1+\frac{p}{100}}\\
\Rightarrow\ &x=100-\frac{100}{1+\frac{p}{100}}\\
\Rightarrow\ &x=100-\frac{10\,000}{100+p}\\
\Rightarrow\ &x=\frac{100(100+p)-10\,000}{100+p}\\
\Rightarrow\ &x=\frac{100p}{100+p}.
\end{aligned}$$

Antwoord D

Oefening 5 Je vriendin gaat op dieet en haar gewicht daalt van 62,5 kg tot 55 kg. Hoeveel procent gewicht heeft zij verloren?

Oplossing Noem p het gevraagde procent. Na afname is haar gewicht gelijk aan

$$\begin{aligned}
&62,5-\frac{p}{100}\cdot 62,5=55\\
\Rightarrow\ &\frac{p\cdot 62,5}{100}=7,5\\
\Rightarrow\ &\frac{p\cdot 125}{100}=15\\
\Rightarrow\ &p=\frac{15\cdot 100}{125}=\frac{3\cdot 100}{25}=3\cdot 4=12.
\end{aligned}$$

Antwoord Je vriendin heeft 12% van haar gewicht verloren.

Oefening 6 Een patiënt krijgt zuurstof toegediend. Daarvoor wordt een mengeling gemaakt van 2 liter zuiver zuurstof en 2 liter gewone lucht die zelf al 21% zuurstof bevat. Hoeveel procent zuurstof bevat de mengeling die de patiënt krijgt toegediend?

Oplossing Het mengsel voldoet aan:

	aantal liter	hoeveelheid zuurstof
zuiver zuurstof	2	2
gewone lucht	2	$\frac{21}{100} \cdot 2$
mengsel	$2+2$	$2 + \frac{21}{100} \cdot 2$

Noem p het gevraagde procent. Dan is

$$\begin{aligned} & \frac{p}{100} \cdot (2+2) = 2 + \frac{21}{100} \cdot 2 \\ \Rightarrow\ & \frac{4p}{100} = \frac{242}{100} \\ \Rightarrow\ & 4p = 242 \\ \Rightarrow\ & p = 60,5. \end{aligned}$$

Antwoord De mengeling die de patiënt krijgt toegediend bevat $60,5\%$ zuurstof.

Oefening 7 Het bloedalcoholgehalte van een persoon is de verhouding van de hoeveelheid alcohol (in gram) per hoeveelheid lichaamsvocht (in liter). Dit bloedalcoholgehalte wordt uitgedrukt in promille. Een man van 70 kg met een totaallichaamsvocht van 51 liter drinkt op korte tijd 4 glazen van 250 ml bier. Het bier heeft een alcoholgehalte van 5%. Het soortelijk gewicht van alcohol is $0,8$ g/ml. Bereken het bloedalcoholgehalte van deze man op $0,1$ promille nauwkeurig.

Oplossing Het bloedalcoholgehalte van deze man is

$$\frac{\text{hoeveelheid alcohol (in gram)}}{\text{hoeveelheid lichaamsvocht (in liter)}} = \frac{A}{51}$$

met A de hoeveelheid alcohol (in gram) in 1000 ml bier.

bier (ml)	alcohol (ml)	alcohol (g)
	1	$0,8$
1000	$\frac{5}{100} \cdot 1000$	$\frac{5}{100} \cdot 1000 \cdot 0,8$

zodat

$$A = \frac{5}{100} \cdot 1000 \cdot 0,8 = 50 \cdot \frac{8}{10} = 40 \text{ g}$$

en dus

$$\frac{\text{hoeveelheid alcohol (in gram)}}{\text{hoeveelheid lichaamsvocht (in liter)}} = \frac{A}{51} = \frac{40}{51} = \frac{80}{102} \approx \frac{80}{100} = 0,8.$$

Antwoord Het bloedalcoholgehalte van deze man is ongeveer $0,8$ promille.

Opmerking In de bovenstaande werkwijze hebben we er geen rekening mee gehouden dat de hoeveelheid lichaamsvocht van de na het drinken van het bier gestegen is tot 52 liter. Doen we dat wel dan verkrijgen we - na afronding - hetzelfde eindresultaat:

$$\frac{\text{hoeveelheid alcohol (in gram)}}{\text{hoeveelheid lichaamsvocht (in liter)}} = \frac{A}{52} = \frac{40}{52} = \frac{80}{104} \approx \frac{80}{100} = 0,8.$$

Oefening 8 Veronderstel dat de concentraties in het bloed van stof A en van stof B omgekeerd evenredig zijn en positief. Als de concentratie van stof A met $p\%$ toeneemt, dan zal de concentratie van stof B afnemen met

(A) $p\%$

(B) $\dfrac{p}{1+p}\,\%$

(C) $\dfrac{100p}{100+p}\,\%$

(D) $\dfrac{p}{100+p}\,\%$

Oplossing Noem c_A de concentratie van stof A en c_B de concentratie van stof B. Noem q de gevraagde concentratie. We vinden:

	oude concentratie	nieuwe concentratie
stof A	c_A	$c_A + \dfrac{p}{100}\,c_A$
stof B	c_B	$c_B - \dfrac{q}{100}\,c_B$

Deze concentraties zijn omgekeerd evenredig, zodat voor een zeker getal $r > 0$ geldt

$$\begin{aligned} &\text{concentratie van stof } B = r \cdot \frac{1}{\text{concentratie van stof A}} \\ \Rightarrow\quad & c_B = r \cdot \frac{1}{c_A}. \end{aligned}$$

Deze evenredigheid klopt ook voor de nieuwe concentraties, zodat

$$\begin{aligned} &\text{nieuwe concentratie van stof } B = r \cdot \frac{1}{\text{nieuwe concentratie van stof A}} \\ \Rightarrow\quad & c_B\left(1 - \frac{q}{100}\right) = r \cdot \frac{1}{c_A\left(1 + \frac{p}{100}\right)} \\ \Rightarrow\quad & c_B\left(1 - \frac{q}{100}\right) = r \cdot \frac{1}{c_A} \cdot \frac{1}{1 + \frac{p}{100}} \\ \Rightarrow\quad & c_B\left(1 - \frac{q}{100}\right) = c_B \cdot \frac{1}{1 + \frac{p}{100}} \end{aligned}$$

waaruit

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{q}{100} = \frac{1}{1 + \frac{p}{100}} \\ \Rightarrow\quad & 100 - q = \frac{100}{1 + \frac{p}{100}} \\ \Rightarrow\quad & q = 100 - \frac{100}{1 + \frac{p}{100}} \\ \Rightarrow\quad & q = 100 - \frac{10\,000}{100 + p} \\ \Rightarrow\quad & q = \frac{100(100 + p) - 10\,000}{100 + p} \\ \Rightarrow\quad & q = \frac{100p}{100 + p}. \end{aligned}$$

Antwoord C

Stelsels

Oefening 9 10 gram suiker wordt toegevoegd aan 40 gram ontbijtgranen die zelf al 30% suiker bevatten. Bereken het percentage suiker in de resulterende mengeling.

Oplossing Het mengsel voldoet aan:

	aantal gram	hoeveelheid suiker
suiker	10	10
ontbijtgranen	40	$\frac{30}{100} \cdot 40$
mengsel	$10 + 40$	$10 + \frac{30}{100} \cdot 40$

Noem p het gevraagde procent. Dan is

$$\begin{aligned} & \frac{p}{100} \cdot (10 + 40) = 10 + \frac{30}{100} \cdot 40 \\ \Rightarrow \quad & \frac{p}{2} = 22 \\ \Rightarrow \quad & p = 44. \end{aligned}$$

Antwoord De resulterende mengeling bevat 44% suiker.

Oefening 10 Als de volgende zoutoplossingen 1 en 2 (NaCl in water) gemengd worden, welke van de mengsels heeft dan een NaCl-concentratie die groter is dan 9 g/l?

(A) Oplossing 1: $0,5$ liter met 10 g/l NaCl;
Oplossing 2: $4,5$ liter met 8 g/l NaCl;

(B) Oplossing 1: 2 liter met 10 g/l NaCl;
Oplossing 2: 3 liter met 8 g/l NaCl;

(C) Oplossing 1: 3 liter met 10 g/l NaCl;
Oplossing 2: 2 liter met 8 g/l NaCl;

(D) Oplossing 1: $4,5$ liter met 10 g/l NaCl;
Oplossing 2: $0,5$ liter met 0 g/l NaCl;

Oplossing Voor mogelijkheid A voldoet het mengsel aan

	aantal liter	aantal gram NaCl
oplossing 1	$0,5$	$0,5 \cdot 10$
oplossing 2	$4,5$	$4,5 \cdot 8$
mengsel	$0,5 + 4,5$	$0,5 \cdot 10 + 4,5 \cdot 8$
	1	$\frac{0,5 \cdot 10 + 4,5 \cdot 8}{0,5 + 4,5}$

zodat de concentratie NaCl van het mengsel gelijk is aan

$$\frac{0,5 \cdot 10 + 4,5 \cdot 8}{0,5 + 4,5} = \frac{5 + 36}{5} = 8,2 \text{ g/l}.$$

Analoog vinden we voor mogelijkheid B een concentratie NaCl van

$$\frac{2 \cdot 10 + 3 \cdot 8}{2 + 3} = \frac{20 + 24}{5} = 8,8 \text{ g/l}$$

en voor mogelijkheid C een concentratie NaCl van

$$\frac{3 \cdot 10 + 2 \cdot 8}{3 + 2} = \frac{30 + 16}{5} = 9,2 \text{ g/l}$$

en voor mogelijkheid D een concentratie NaCl van

$$\frac{4,5 \cdot 10 + 0 \cdot 8}{4,5 + 0,5} = \frac{45}{5} = 9 \text{ g/l}.$$

Antwoord C

Oefening 11 In de ziekenhuisapotheek zijn twee actieve stoffen A en B beschikbaar als mengsels. Men beschikt over een stock van twee soorten mengsels, mengsel 1 en mengsel 2. De samenstelling van deze twee mengsels is in de volgende tabel weergegeven.

	mengsel 1	mengsel 2
A	20%	5%
B	10%	15%

De apotheker mengt een hoeveelheid mengsel 1 met een andere hoeveelheid mengsel 2. Hij bekomt dan een nieuw mengsel met 80 mg actieve stof A en 50 mg actieve stof B. Welke hoeveelheid van dit nieuwe mengsel bekomt hij dan?

(A) 640 mg
(B) 460 mg
(C) 880 mg
(D) 560 mg

Oplossing Noem x de hoeveelheid van mengsel 1 en y de hoeveelheid van mengsel 2. Gevraagd is $x+y$. Enerzijds voldoet het mengsel aan:

	aantal gram	hoeveelheid A	hoeveelheid B
mengsel 1	x	$0,2 \cdot x$	$0,1 \cdot x$
mengsel 2	y	$0,05 \cdot y$	$0,15 \cdot y$
nieuwe mengsel	$x+y$	$0,2 \cdot x + 0,05 \cdot y$	$0,1 \cdot x + 0,15 \cdot y$

Anderzijds bevat het nieuwe mengsel 80 mg stof A en 50 mg stof B. Gelijkstellen levert:

$$\begin{cases} 0,2 \cdot x + 0,05 \cdot y = 80 & (1) \\ 0,1 \cdot x + 0,15 \cdot y = 50 & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -0,25 \cdot y = -20 & (1) - 2 \cdot (2) \\ 0,1 \cdot x + 0,15 \cdot y = 50 & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 80 \\ 0,1 \cdot x + 0,15 \cdot 80 = 50 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 80 \\ x = 380 \end{cases}$$

zodat $x + y = 380 + 80 = 460$.

Antwoord B

Oefening 12 Hoeveel liter van een 20% alcoholoplossing en van een 50% alcoholoplossing moeten bij elkaar gemengd worden om 9 liter van een 30% alcoholoplossing te krijgen?

Oplossing Gevraagd is een alcoholoplossing te maken met

	aantal liter	hoeveelheid alcohol
30% alcoholoplossing	9	$0,3 \cdot 9$

Noem x het aantal liter nodig van de 20% alcoholoplossing en y het aantal liter nodig van de 50% alcoholoplossing. Elk mengsel hiervan voldoet aan:

	aantal liter	hoeveelheid alcohol
20% alcoholoplossing	x	$0,2 \cdot x$
50% alcoholoplossing	y	$0,5 \cdot y$
mengsel	$x+y$	$0,2 \cdot x + 0,5 \cdot y$

Zo verkrijgen we het stelsel

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 0,2 \cdot x + 0,5 \cdot y = 0,3 \cdot 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 - y \\ 0,2 \cdot (9 - y) + 0,5 \cdot y = 2,7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 9 - y \\ 0,3\, y = 0,9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3. \end{cases}$$

Antwoord Men moet 6 liter van de 20% alcoholoplossing mengen met 3 liter van de 50% alcoholoplossing.

Oefening 13 We hebben twee vloeistoffen: een eerste met alcoholgehalte van 30%, een tweede met alcoholgehalte van 70%. We nemen p liter van de eerste en voegen die samen met q liter van de tweede. Zo verkrijgen we 8 liter mengsel, met een alcoholpercentage van 60%. Hoeveel is p?

(A) 1

(B) 2

(C) 4

(D) 6

Oplossing Gevraagd is een alcoholoplossing te maken met

	aantal liter	hoeveelheid alcohol
alcoholgehalte van 60%	8	$0,6 \cdot 8$

Een mengsel van p liter van de vloeistof met alcoholgehalte van 30% en q liter van de vloeistof met alcoholgehalte van 70% voldoet aan

	aantal liter	hoeveelheid alcohol
30% alcoholoplossing	p	$0,3 \cdot p$
70% alcoholoplossing	q	$0,7 \cdot q$
mengsel	$p+q$	$0,3 \cdot p + 0,7 \cdot q$

Zo verkrijgen we het stelsel

$$\begin{cases} p+q=8 \\ 0,3 \cdot p + 0,7 \cdot q = 0,6 \cdot 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 8-q \\ 0,3 \cdot (8-q) + 0,7 \cdot q = 4,8 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} p = 8-q \\ 0,4\,q = 2,4 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} p = 2 \\ q = 6. \end{cases}$$

Antwoord B

Oefening 14 Voor welke waarde van a is het stelsel $\begin{cases} 5x+2y-2=0 \\ 11x+ay-3=0 \end{cases}$ onoplosbaar?

(A) 2

(B) 22/5

(C) −22/5

(D) −2

Oplossing We manipuleren het stelsel als volgt:

$$\begin{cases} 5x+2y-2=0 & (1) \\ 11x+ay-3=0 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 55x+22y-22=0 & 11\cdot(1) \\ 55x+5ay-15=0 & 5\cdot(2) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (22-5a)y-7=0 & 11\cdot(1)-5\cdot(2) \\ 55x+5ay-15=0 & 5\cdot(2) \end{cases}$$

Als $22-5a \neq 0$ dan verkrijgen we uit de eerste vergelijking $y = 7/(22-5a)$, en invullen in de tweede vergelijking levert dan een oplossing voor x. Als echter $22-5a=0$, dan geeft de eerste vergelijking $0=7$, en in dat geval is het stelsel onoplosbaar.

Alternatieve oplossing Ken je de regel van Cramer (matrices en determinanten) dan weet je dat een vierkant stelsel een (unieke) oplossing heeft als en slechts als de determinant van de coëfficiëntenmatrix verschillend is van nul, dus als en slechts als

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 11 & a \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5a-22 \neq 0.$$

Antwoord B

Oefening 15 Men beschikt over twee oplossingen van hetzelfde zuur: een 7% oplossing en een 15% oplossing. Hoeveel liter van de 7% oplossing en hoeveel liter van de 15% oplossing moeten bij elkaar gemengd worden om 20 liter van een 13% oplossing te verkrijgen?

Oplossing Gevraagd is een mengsel te maken met

	aantal liter	hoeveelheid zuur
13% oplossing	20	$0,13 \cdot 20$

Noem x het aantal liter nodig van de 7% oplossing en y het aantal liter nodig van de 15% oplossing. Elk mengsel hiervan voldoet aan:

	aantal liter	hoeveelheid zuur
7% oplossing	x	$0,07 \cdot x$
15% oplossing	y	$0,15 \cdot y$
mengsel	$x+y$	$0,07 \cdot x + 0,15 \cdot y$

Zo verkrijgen we het stelsel

$$\begin{cases} x+y=20 \\ 0,07 \cdot x + 0,15 \cdot y = 0,13 \cdot 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20-y \\ 0,07 \cdot (20-y) + 0,15 \cdot y = 2,6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 20-y \\ 0,08\,y = 1,2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 15 \end{cases}$$

Antwoord Men moet 5 liter van de 7% oplossing mengen met 15 liter van de 15% oplossing.

Oefening 16 In de afdeling voedingssupplementen beschikt men over twee basismengsels.

- Mengsel 1 bevat 20% proteïnen en 1% vetten.
- Mengsel 2 bevat 15% proteïnen en 7% vetten.

Na het samenvoegen van de twee mengsels heeft men 52 g mengsel, waarvan 10 g proteïnen. Welke massa vetten bevindt zich in het mengsel?

Oplossing

Noem x de massa vetten in het mengsel. Het mengsel voldoet aan:

	aantal gram	hoeveelheid proteïnen	hoeveelheid vetten
mengsel	52	10	x

Daarnaast wordt het mengsel opgebouwd uit twee basismengsels. Noemen we p het aantal gram van mengsel 1 en q het aantal gram van mengsel 2, dan verkrijgen we:

	aantal gram	hoeveelheid proteïnen	hoeveelheid vetten
Mengsel 1	p	$0,2 \cdot p$	$0,01\, p$
Mengsel 2	q	$0,15 \cdot q$	$0,07\, q$
mengsel	$p+q$	$0,2 \cdot p + 0,15 \cdot q$	$0,01 \cdot p + 0,07 \cdot q$

Zo verkrijgen we het stelsel

$$\begin{cases} p+q=52 \\ 0,2 \cdot p + 0,15 \cdot q = 10 \\ 0,01 \cdot p + 0,07 \cdot q = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 52-q \\ 0,2 \cdot (52-q) + 0,15 \cdot q = 10 \\ 0,01 \cdot p + 0,07 \cdot q = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p = 52-y \\ -0,05\, q = -0,4 \\ 0,01 \cdot p + 0,07 \cdot q = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p = 44 \\ q = 8 \\ 0,01 \cdot p + 0,07 \cdot q = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p = 44 \\ q = 8 \\ 0,01 \cdot 44 + 0,07 \cdot 8 = x \end{cases}$$

waaruit volgt dat $x = 0,44 + 0,56 = 1$.

Antwoord Het mengsel bevat 1 g vetten.

Oefening 17 Hoeveel gram zuiver water moet er toegevoegd worden aan 50 gram van een zoutoplossing van 15% om een zoutoplossing van 10% te verkrijgen?

Oplossing Gevraagd is een zoutoplossing te maken met

	aantal gram	hoeveelheid zout
10% oplossing	p	$0,1 \cdot p$

waarbij p staat voor het totaal aantal gram van dit mengsel. Noem x het aantal gram zuiver water dat men nodig heeft. Dan voldoet het mengsel van zuiver water en de 15% zoutoplossing aan:

	aantal gram	hoeveelheid zout
zuiver water	x	0
15% oplossing	50	$0,15 \cdot 50$
mengsel	$x + 50$	$0,15 \cdot 50$

Zo verkrijgen we het stelsel

$$\begin{cases} x + 50 = p \\ 0,15 \cdot 50 = 0,1 \cdot p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 50 = p \\ p = 75 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 25 \\ p = 75 \end{cases}$$

Antwoord Men moet 25 g zuiver water nodig.

Oefening 18 Een arts schrijft een patiënt een dagelijkse inname van 50 mg van zowel niacine, riboflavine en thiamine voor om een vitaminetekort te verhelpen. De patiënt heeft nog drie soorten vitaminepreparaten liggen. De hoeveelheid van de relevante vitamines per capsule vind je in de onderstaande tabel. Hoeveel capsules van elke soort moet de patiënt nemen om aan 50 mg van elk van de drie vermelde vitamines te komen?

	VitaMax	Vitron	VitaPlus
Niacin (mg)	5	10	15
Riboflavin (mg)	15	20	0
Thiamin (mg)	10	10	10

Oplossing

Gevraagd is een mengsel te maken dat voldoet aan:

	aantal capsules	hoeveelheid Niacin	hoeveelheid Riboflavin	hoeveelheid Thiamin
mengsel		50	50	50

Noem x het aantal capsules VitaMax, y het aantal capsules Vitron en z het aantal capsules VitaPlus dat de patiënt nodig heeft. Dan voldoet elk mengsel hiervan aan:

	aantal capsules	hoeveelheid Niacin	hoeveelheid Riboflavin	hoeveelheid Thiamin
VitaMax	x	$5x$	$15x$	$10x$
Vitron	y	$10y$	$20y$	$10y$
VitaPlus	z	$15z$	$0z$	$10z$
Mengsel	$x + y + z$	$5x + 10y + 15z$	$15x + 20y$	$10x + 10y + 10z$

Zo verkrijgen we het stelsel

$$\begin{cases} 5x + 10y + 15z = 50 \\ 15x + 20y = 50 \\ 10x + 10y + 10z = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 10 & (1) \\ 3x + 4y = 10 & (2) \\ x + y + z = 5 & (3) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 10 & (1) \\ -2y - 9z = -20 & (2) - 3 \cdot (1) \\ -y - 2z = -5 & (3) - (1) \end{cases}$$

Uit de laatste twee vergelijkingen volgt eenvoudig dat $y = 1$ en $z = 2$. Invullen in de eerste vergelijking levert dan $x = 2$.

Antwoord De patiënt moet 2 capsules VitaMax, 1 capsule Vitron en 2 capsules VitaPlus nemen.

Oefening 19 In de ziekenhuisapotheek zijn twee actieve stoffen B_1 en B_2 beschikbaar als mengsels. Men beschikt over een stock van 2 soorten mengsels, mengsel 1 en mengsel 2. De samenstelling van deze twee mengsels is in de volgende tabel weergegeven.

	mensel 1	mengsel 2
B_1	20%	5%
B_2	10%	15%

De apotheker mengt 80 mg van mengsel 1 met 50 mg van mengsel 2. Hoeveel bedraagt de totale massa actieve stof in dit nieuwe mengsel?

(A) 24 mg

(B) 28 mg

(C) 34 mg

(D) 52 mg

Oplossing Het mengsel voldoet aan:

	aantal mg	hoeveelheid B_1	hoeveelheid B_2
mengsel 1	80	$0,2 \cdot 80$	$0,1 \cdot 80$
mengsel 2	50	$0,05 \cdot 50$	$0,15 \cdot 50$
mengsel	$80 + 50$	$0,2 \cdot 80 + 0,05 \cdot 50$	$0,1 \cdot 80 + 0,15 \cdot 50$

De totale massa actieve stof in dit nieuwe mengsel is dus gelijk aan

$$(0,2 \cdot 80 + 0,05 \cdot 50) + (0,1 \cdot 80 + 0,15 \cdot 50) = 16 + 2,5 + 8 + 7,5 = 34\,\mathrm{mg}.$$

Antwoord C

Oefeningen die aanleiding geven tot een stelsel

Oefening 20 Een parabool met als vergelijking $y = ax^2 + bx + c$ heeft als top het punt $P(4,2)$ en gaat door het punt $Q(2,0)$. Bepaal a, b en c.

Oplossing De top van een parabool met vergelijking $y = ax^2 + bx + c$ heeft als x-waarde $-b/2a$. De drie voorwaarden

(1) $-\dfrac{b}{2a} = 4$

(2) P ligt op de parabool

(3) Q ligt op de parabool

laten zich vertalen in het stelsel

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 4 \\ 2 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c \\ 0 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -8a \\ 16a + 4b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -8a \\ 16a - 32a + c = 2 \\ 4a - 16a + c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -8a \\ c = 2 + 16a \\ -12a + 2 + 16a = 0. \end{cases}$$

Uit de laatste vergelijking vinden we $a = -1/2$. Invullen in de eerste en de tweede vergelijking levert dan $b = 4$ en $c = -6$.

Antwoord $a = -1/2$, $b = 4$ en $c = -6$

Oefening 21 Bij deling van de veelterm $2x^3 - ax^2 + bx - 8$ door $x^2 + 2x + 3$ is de rest gelijk aan $3x + 4$. Bepaal a, b en het quotiënt.

Oplossing Noemen we $Q(x)$ het quotiënt van de deling van $2x^3 - ax^2 + bx - 8$ door $x^2 + 2x + 3$, dan kunnen we schrijven

$$2x^3 - ax^2 + bx - 8 = (x^2 + 2x + 3) \cdot Q(x) + 3x + 4 \qquad (*)$$

Het linkerlid van vergelijking $(*)$ is een veelterm van graad 3. Dus moet de graad van het rechterlid van vergelijking $(*)$ ook gelijk zijn aan 3. Dat kan alleen als de graad van het quotiënt $Q(x)$ gelijk is aan 1, zodat $Q(x) = px + q$ voor zekere $p, q \in \mathbb{R}$. Vervangen we in vergelijking $(*)$ het quotiënt $Q(x)$ door $px + q$ dan verkrijgen we

$$\begin{aligned}
& 2x^3 - ax^2 + bx - 8 = (x^2 + 2x + 3) \cdot (px + q) + 3x + 4 \\
\Rightarrow\ & 2x^3 - ax^2 + bx - 8 = px^3 + qx^2 + 2px^2 + 2qx + 3px + 3q + 3x + 4 \\
\Rightarrow\ & 2x^3 - ax^2 + bx - 8 = px^3 + (q + 2p)x^2 + (2q + 3p + 3)x + 3q + 4.
\end{aligned}$$

Vergelijken van coëfficiënten in linker- en rechterlid levert het stelsel

$$\begin{cases}
2 = p & (1) \\
-a = q + 2p & (2) \\
b = 2q + 3p + 3 & (3) \\
-8 = 3q + 4 & (4).
\end{cases}$$

Uit (1) en (4) volgt meteen $p = 2$ en $q = -4$. Substitutie in (2) en (3) geeft dan $a = 0$ en $b = 1$.

Antwoord $a = 0$, $b = 1$, quotiënt $2x - 4$

Oefening 22 Een veelterm $p(x)$ geeft bij deling door $x - 3$ als rest 10 en bij deling door $x + 2$ als rest 0. Bepaal de rest bij deling van $p(x)$ door $(x - 3)(x + 2)$.

Oplossing Wegens de reststelling is de rest bij deling van een veelterm $p(x)$ door een veelterm van de vorm $x - a$ gelijk aan $p(a)$. De gegevens leiden dan tot $p(3) = 10$ en $p(-2) = 0$. Noemen we $Q(x)$ het quotiënt en $R(x)$ de rest van de deling van $p(x)$ door $(x - 3)(x + 2)$, dan vinden we

$$p(x) = (x - 3)(x + 2) \cdot Q(x) + R(x).$$

Bovendien is de graad van $R(x)$ kleiner dan de graad van $(x - 3)(x + 2)$, zodat $R(x) = ax + b$ voor zekere $a, b \in \mathbb{R}$, en dus

$$p(x) = (x - 3)(x + 2) \cdot Q(x) + ax + b.$$

Opeenvolgend vervangen van x door 3 en -2 leidt tot het stelsel

$$\begin{cases}
p(3) = a \cdot 3 + b \\
p(-2) = a \cdot (-2) + b
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
3a + b = 10 \\
-2a + b = 0
\end{cases}$$

zodat $a = 2$ en $b = 4$.

Antwoord $a = 2$, $b = 4$

Oefening 23 Bepaal de vergelijking van de cirkel die door de punten $A(3,7)$, $B(11,3)$ en $C(-4,0)$ gaat. Bepaal dan ook het middelpunt en de straal van deze cirkel.

Oplossing De vergelijking van een cirkel $\mathcal{C}$ met middelpunt $M(a,b)$ en straal r is

$$\mathcal{C} : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Uitdrukken dat de punten A, B en C op de cirkel liggen resulteert in het stelsel

$$\begin{cases} (3-a)^2 + (7-b)^2 = r^2 & (1) \\ (11-a)^2 + (3-b)^2 = r^2 & (2) \\ (-4-a)^2 + (0-b)^2 = r^2 & (3). \end{cases}$$

Gelijkstellen van het linkerlid in (1),(3) en in (2),(3) geeft het eenvoudiger stelsel

$$\begin{aligned} \begin{cases} (3-a)^2 + (7-b)^2 = (-4-a)^2 + b^2 \\ (11-a)^2 + (3-b)^2 = (-4-a)^2 + b^2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 9 - 6a + a^2 + 49 - 14b + b^2 = 16 + 8a + a^2 + b^2 \\ 121 - 22a + a^2 + 9 - 6b + b^2 = 16 + 8a + a^2 + b^2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} -14a - 14b = -3 \\ -30a - 6b = -114 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ 5a + b = 19 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Uit (1) volgt dan $r^2 = (3-a)^2 + (7-b)^2 = (3-4)^2 + (7+1)^2 = 65$ zodat $r = \sqrt{65}$.

Antwoord De cirkel heeft als middelpunt $M(4,-1)$ en straal $r = \sqrt{65}$.