STEEDS BETERE BENADERING VOOR HET GETAL π

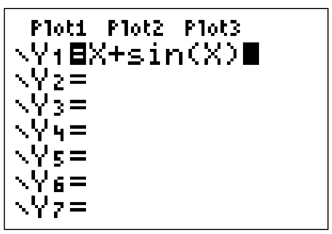
KOEN DE NAEGHEL

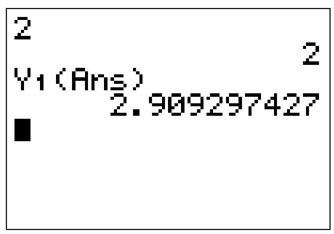
Samenvatting. We bespreken een oplossing voor de (veralgemeende) opgave Noot 4 uit Wiskunde & Onderwijs nr.139. Onze inspiratie halen we uit het grafisch representeren van iteraties.

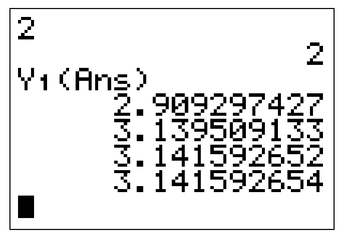
Opgave (Noot 4 uit Wiskunde & Onderwijs nr.139). Als $P(1)$ een benadering is voor π (met $2 \leq P(1) \leq 4$), dan is $P(2) = P(1) + \sin P(1)$ steeds een betere benadering voor π. Bewijs dat.

Bespreking. Beschouw de functie $f(x) = x + \sin x$. Om de opgave te bewijzen, volstaat het om aan te tonen dat voor elke $x \in [2, 4] \setminus \{\pi\}$ de rij $x, f(x), f(f(x)), \ldots$ ofwel strikt stijgend is die naar boven begrensd is door π, ofwel strikt dalend is die naar onder begrensd is door π. Merk op dat we $x = \pi$ vermijden, vermits de opgave het heeft over een benadering voor π.

Experimentele aanwijzingen. Met behulp van een grafisch rekenmachine (bijvoorbeeld TI-84 Plus) kunnen we de eerste termen van zo'n rij als volgt berekenen:







Interpretatie. We merken inderdaad dat de rij $2, f(2), f(f(2)), \ldots$ strikt stijgend is, naar boven begrensd is door π. Analoog observeren we dat bijvoorbeeld de rij $4, f(4), \ldots$ strikt dalend is, naar onder begrensd door π.

Een algemeen bewijs hiervoor gaat als volgt: uit de klassieke ongelijkheden (zie verder voor een bewijs)

$$\begin{cases} 0 < \sin x < \pi - x & \forall x \in]0, \pi[\\ \pi - x < \sin x < 0 & \forall x \in]\pi, 2\pi[\end{cases} \quad \text{volgt} \quad \begin{cases} x < f(x) < \pi & \forall x \in]0, \pi[\\ \pi < f(x) < x & \forall x \in]\pi, 2\pi[\end{cases}$$

Herhaaldelijk toepassen van deze ongelijkheden levert voor $2 \leq x < \pi$ dat de rij $x, f(x), \ldots$ strikt stijgend is, naar boven begrensd door π; en voor $\pi < x \leq 4$ dat de rij $x, f(x), \ldots$ strikt dalend is die naar onder begrensd is door π. Dit bewijst de opgave.

Date: 10 september 2009.

Maar uit bovenstaand voorbeeld met het grafisch rekenmachine komen we in de verleiding te denken dat de rij $2, f(2), f(f(2)), \ldots$ zelfs convergeert naar π. Dus we vermoeden

$$(1) \qquad \boxed{\forall x \in [2,4] : \text{ de rij } x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots \text{ convergeert naar } \pi}$$

Het stijgend resp. dalend karakter van de rijen levert ons meteen een hint op hoe we (1) kunnen bewijzen: een strikt stijgende (resp. dalende) rij die naar boven (resp. onder) begrensd is, convergeert naar het supremum (resp. infimum) van die rij.

Dus om (1) te bewijzen volstaat het om aan te tonen

$$\begin{cases} \forall x \in [2,\pi[: \text{ de rij } x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots \text{ is strikt stijgend met supremum } \pi \\ \forall x \in]\pi, 4] : \text{ de rij } x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots \text{ is strikt dalend met infimum } \pi \end{cases}$$

Om de twee bovenstaande beweringen aan te tonen, dienen we te bewijzen dat π de kleinste bovengrens resp. grootste ondergrens is, hetgeen een sluitend argument vereist.

Eén manier om zo'n argument te vinden is vanuit een meetkundige benadering van het probleem. In wat volgt herhalen we eerst enkele algemene begrippen in verband met het grafisch voorstellen van iteraties.

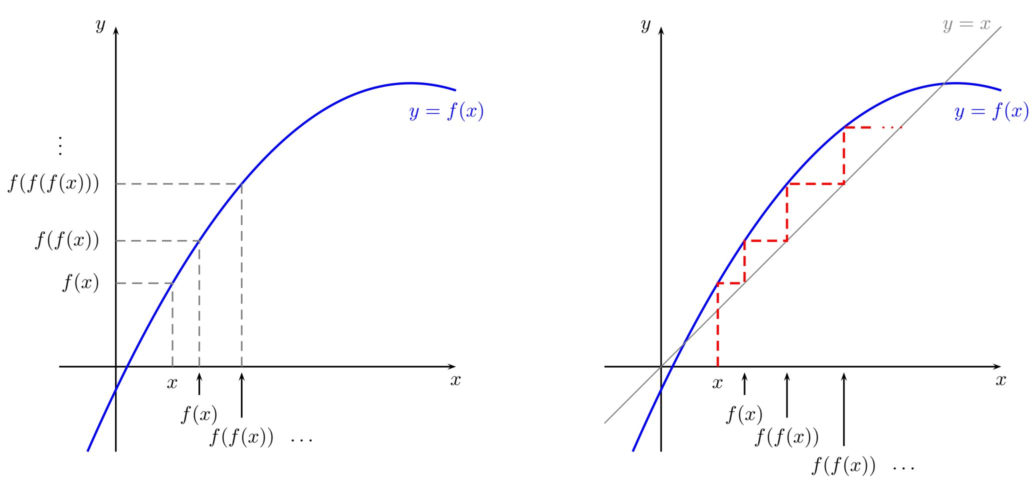
Voorkennis. Zij, in het algemeen, f een continue functie met domein $\mathbb{R}$ en $x \in \mathbb{R}$.
We kunnen de rij $x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots$ meetkundig voorstellen aan de hand van de volgende procedure:

(1) Duid de waarde x aan op de x-as, en lees de waarde $f(x)$ af op de y-as.
(2) Plaats de waarde $f(x)$ op de x-as. Dit kan door het punt $P_1(0, f(x))$ te spiegelen om de rechte $y = x$, zodat we het punt $Q_1(f(x), 0)$ bekomen.

Door deze procedure te herhalen voor $f(x), f(f(x))$, etc. bekomen we de volgende figuur links. Verbinden we de punten

$$Q_0(x,0),\ R_1(x, f(x)),\ S_1(f(x), f(x)),\ R_2(f(x), f(f(x))),\ S_2(f(f(x)), f(f(x))),\ \text{ etc.}$$

dan bekomen we het zogenaamd <u>spinnenwebdiagram</u> van x (figuur rechts).



Snijpunten van de grafiek van f met de rechte $y = x$ worden fixpunten van de grafiek van f genoemd. Een fixpunt is dus van de gedaante $P(a, f(a))$ met $a \in \mathbb{R}$ waarvoor $f(a) = a$. Zo'n fixpunt noemt aantrekkend indien

$$\exists \epsilon > 0 : \forall x \in \,]a-\epsilon, a+\epsilon[\, : \text{ de rij } x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots \text{ convergeert naar } a$$

Meetkundig wil dit zeggen dat er een open omgeving van a bestaat waarvoor het spinnenwebdiagram van elke waarde in die omgeving streeft naar het fixpunt $P(a, f(a))$.

Analoog definieert men een afstotend fixpunt $P(a, f(a))$: als er een open omgeving van a is waarvoor de rij $x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots$ termen bereikt die niet meer in die omgeving liggen. Formeel, een fixpunt $P(a, f(a))$ noemt afstotend indien

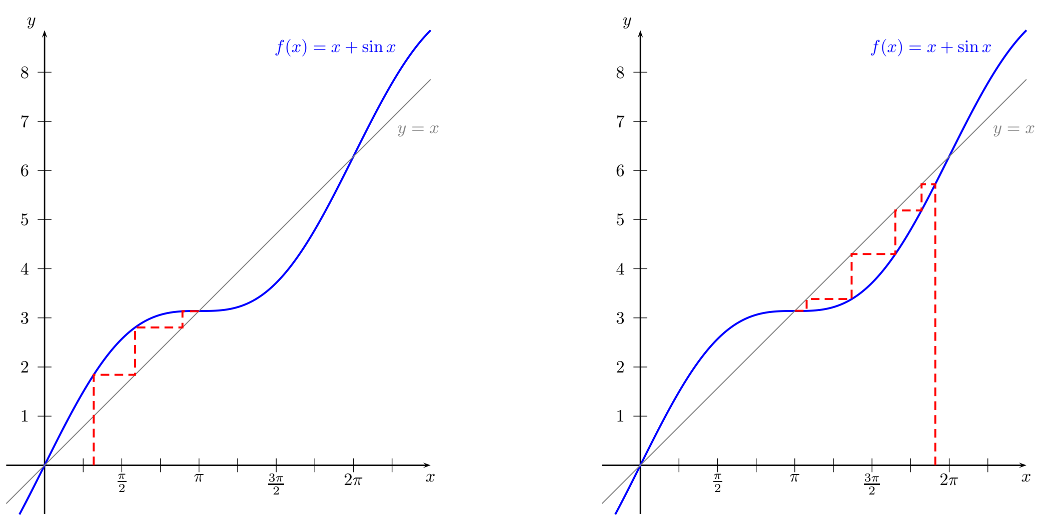
$$\exists \epsilon > 0 : \forall x \in \,]a-\epsilon, a+\epsilon[\, \setminus \{a\} : \exists k \in \mathbb{N} : \underbrace{f(f(f(\ldots(f}_{k \text{ keer}}(x))\ldots))) \notin \,]a-\epsilon, a+\epsilon[$$

Met behulp van elementaire calculus kan men de volgende stelling bewijzen (zie [1]):

Stelling. *Zij f een afleidbare functie met domein $\mathbb{R}$, en zij $P(a, f(a))$ een fixpunt van de grafiek van f. Dan geldt*

$$\boxed{\begin{array}{l} \textit{als } |f'(a)| < 1 \textit{ dan is } P(a, f(a)) \textit{ een aantrekkend fixpunt} \\ \textit{als } |f'(a)| > 1 \textit{ dan is } P(a, f(a)) \textit{ een afstotend fixpunt} \end{array}}$$

Meetkundige aanwijzingen. Beschouw nu terug de functie $f(x) = x + \sin x$, en neem $x \in \,]0, 2\pi[$. Tekenen we het spinnenwebdiagram van x, dan merken we dat het spinnenwebdiagram streeft naar het fixpunt $P(\pi, \pi)$.



Dit bevestigd ons vermoeden (1), en zelfs wat ruimer vermoeden we

(2) $\boxed{\forall x \in \,]0, 2\pi[\, : \text{ de rij } x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots \text{ convergeert naar } \pi}$

In een eerste poging om (2) te bewijzen passen we de bovenstaande stelling toe op de functie $f(x) = x + \sin x$ en het fixpunt $P(\pi, \pi)$. We hebben $f'(x) = 1 + \cos x$, zodat

$|f'(\pi)| = 0 < 1$. Bijgevolg is P een aantrekkend fixpunt, zodat alvast

$$\exists \epsilon > 0 : \forall x \in\,]\pi - \epsilon, \pi + \epsilon[\, : \text{ de rij } x, f(x), f(f(x)), \ldots \text{ convergeert naar } \pi$$

Maar de stelling levert ons enkel het bestaan van een open omgeving van π waarvoor de rij $x, f(x), f(f(x)), \ldots$ convergeert naar π, terwijl we wensen aan te tonen dat deze uitspraak geldt voor de welbepaalde omgeving $]0, 2\pi[$.

Alhoewel (2) duidelijk is op een figuur, is een figuur op zich geen bewijs. Maar het legt wel de reden bloot *waarom* voor elke x-waarde tussen 0 en 2π het spinnenwebdiagram convergeert naar het fixpunt $P(\pi, \pi)$:

(1) Voor elke $x \in\,]0, \pi[$ ligt de grafiek van f boven de rechte $y = x$, zodat $x < f(x)$.
(2) Voor elke $x \in\,]0, \pi[$ ligt de grafiek van f onder de rechte $y = \pi$, zodat $f(x) < \pi$.
(3) Over het interval $]0, \pi[$ bereikt de grafiek van f geen fixpunt, wat impliceert dat het spinnenwebdiagram voor x convergeert naar het fixpunt $P(\pi, \pi)$.

Een analoge redenering gaat op voor $x \in\,]\pi, 2\pi[$. Op deze manier komen we uiteindelijk tot een

Formeel bewijs van (2). We zullen aantonen dat

$$(2) \qquad \boxed{\forall x \in\,]0, 2\pi[\, : \text{ de rij } x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots \text{ convergeert naar } \pi}$$

Neem $x \in\,]0, \pi[$. Dan geldt alvast $0 < \sin x$. Anderzijds is $\sin z < z$ voor elke $z \in\,]0, \pi[$, zodat ook $\underbrace{\sin(\pi - x)}_{\sin x} < \pi - x$. We verkrijgen

$$0 < \sin x < \pi - x \quad \Rightarrow \quad x < \underbrace{x + \sin x}_{f(x)} < \pi$$

Hieruit besluiten we dat de rij $x, f(x), f(f(x)), \ldots$ strikt stijgend is met bovengrens π.

Zoals vermeld in het begin van dit artikel rest ons nog aan te tonen dat π de kleinste bovengrens is van deze rij.

Wegens het supremumprincipe heeft de rij $x, f(x), f(f(x)), \ldots$ alvast een supremum (i.e. kleinste bovengrens), die we noteren met s. Drukken we de kenmerkende eigenschappen van het supremum uit, dan vinden we (zie [2]):

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N} : \underbrace{f(f(f(\ldots(f}_{k \text{ keer}}(x))\ldots))) \leq s & (*) \\ \forall \epsilon > 0 : \exists m \in \mathbb{N} : s - \epsilon < \underbrace{f(f(f(\ldots(f}_{m \text{ keer}}(x))\ldots))) & (**) \end{cases}$$

Uiteraard is $0 < s$. Onderstellen we uit het ongerijmde dat $s < \pi$, dan is noodzakelijk $s < f(s)$. Noemen we $\epsilon = s - f(s) > 0$, dan bestaat er wegens $(**)$ een $m \in \mathbb{N}$ waarvoor

$$\underbrace{s - \epsilon}_{f(s)} < \underbrace{f(f(f(\ldots(f}_{m \text{ keer}}(x))\ldots))) \leq s$$

waarbij de ongelijkheid aan de rechterkant volgt uit $(*)$. Maar dan is $f(s) < s$, een strijdigheid met de eerder bekomen ongelijkheid $s < f(s)$. Bijgevolg is π het supremum van de rij $x, f(x), f(f(x)), \ldots$ waaruit

$$\forall x \in \,]0, \pi[\,: \text{ de rij } x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots \text{ convergeert naar } \pi$$

Analoog kan men aantonen dat deze uitspraak ook geldt voor $x \in \,]\pi, 2\pi[$, waaruit het gestelde (2) volgt. $\square$

Referenties

[1] K. T. Alligood, T. D. Sauer en J. A. Yorke, *Chaos An Introduction to Dynamical Systems*, Springer-Verlag, 1996.

[2] C. Impens, *Analyse I*, Universiteit Gent, uitgave 1996-1997.

[3] D. Tant, *Noten*, Wiskunde & Onderwijs **139** (2009), 247–254.

Koen De Naeghel, Onze-Lieve-Vrouwecollege, Collegestraat 24, 8310 Brugge.
E-mail address: `koendenaeghel@hotmail.com`