OVER IRRATIONALE GETALLEN EN MACHTEN VAN π

KOEN DE NAEGHEL

SAMENVATTING. In deze nota buigen we ons over de vraag of een macht van π een irrationaal getal is. De aangereikte opbouw en bewijsmethoden zijn geschikt voor leerlingen van het middelbaar onderwijs.

1. Inleiding

In 1761 bewees Johann Heinrich Lambert dat het getal $\pi = 3,141592\ldots$ een irrationaal getal is [3]. Men zou de vraag kunnen stellen of de machten $\pi^2, \pi^3, \pi^4, \ldots$ ook irrationale getallen zijn. In deze nota tonen we het antwoord op die vraag.

Eerst laten we zien dat een (natuurlijke) macht van een irrationaal getal niet noodzakelijk terug een irrationaal getal is. Op basis hiervan zouden we kunnen stellen dat irrationaliteit zich niet overdraagt op machten, i.e.

$$a \text{ irrationaal } \not\Rightarrow a^n \text{ irrationaal}$$

voor $a \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}_0$ willekeurig. Een eigenschap die zich wel overdraagt op natuurlijke machten is de zogenaamde *transcendentie* (zie paragraaf 3 en 4), i.e.

$$a \text{ transcendent } \Rightarrow a^n \text{ transcendent}$$

voor $a \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}_0$ willekeurig. Maken we bovendien gebruik van het feit dat het product van twee niet-transcendente getallen noodzakelijk niet-transcendent is, dan kunnen we bovendien laten zien dat transcendentie zich ook overdraagt op rationale machten (zie paragraaf 5), i.e.

$$a \text{ transcendent } \Rightarrow a^r \text{ transcendent}$$

voor $a \in \mathbb{R}$ en $r \in \mathbb{Q}_0$ willekeurig.

2. Natuurlijke machten van irrationale getallen

Voor een reëel getal a mag men uit de veronderstelling dat a irrationaal is geenszins besluiten dat $a^2, a^3, \ldots$ ook allen irrationaal zijn. Dit blijkt uit de volgende

Eigenschap 1. Voor elk natuurlijk getal n met $n \neq 0, 1$ voldoet het getal $a = \sqrt[n]{2}$ aan de volgende eigenschap:

$$a, a^2, a^3, \ldots, a^{n-1} \text{ zijn irrationale getallen, maar } a^n \text{ is geen irrationaal getal}$$

Bewijs. Kies een natuurlijk getal n met $n \neq 0, 1$. Uit $a^n = 2$ volgt dat a^n een geheel getal is, en dus ook rationaal is. Derhalve is a^n niet irrationaal. Om het tweede luik van de eigenschap te bewijzen, veralgemenen we het klassieke bewijs van Euclides dat $\sqrt{2}$ een irrationaal getal is. Kies een natuurlijk getal $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, en stel uit het ongerijmde dat a^k een rationaal getal is. Dan bestaan er natuurlijke getallen p, q met $q \neq 0$ zodat $a^k = p/q$. Bovendien mogen we aannemen dat p en q onderling ondeelbaar zijn. We vinden

$$\begin{aligned} a^k = \frac{p}{q} \quad &\Rightarrow \quad \left(a^k\right)^n \cdot q^n = p^n \\ &\Rightarrow \quad (a^n)^k \cdot q^n = p^n \\ &\Rightarrow \quad 2^k \cdot q^n = p^n \end{aligned}$$

In deze laatste gelijkheid is 2 een deler van het linkerlid (want $k > 0$), zodat 2 ook een deler is van het rechterlid. Het priemgetal 2 komt dus voor in de priemontbinding van p^n, en dus ook in de priemontbinding van p. Op die manier hebben we aangetoond dat p een even getal is, zodat er een natuurlijk getal p' bestaat met $p = 2p'$. Substitutie in de vorige gelijkheid geeft

$$\begin{aligned} 2^k \cdot q^n = p^n \quad &\Rightarrow \quad 2^k \cdot q^n = 2^n (p')^n \\ &\Rightarrow \quad q^n = 2^{n-k}(p')^n \end{aligned}$$

In deze laatste gelijkheid is 2 een deler van het rechterlid (want $k < n$), zodat 2 ook een deler is van het linkerlid. Het priemgetal 2 komt dus voor in de priemontbinding van q^n, en dus ook in de priemontbinding van q. Op die manier hebben we aangetoond dat q een even getal is. Derhalve zijn zowel p als q even getallen. Maar nu volgt een contradictie met het feit dat p en q onderling ondeelbaar zijn. We besluiten dat a^k een irrationaal getal is. $\square$

Bovenstaande eigenschap met bewijs laat zich veralgemenen tot $a = \sqrt[n]{m}$ met m een natuurlijk getal dat niet de p-de macht is van een ander natuurlijk getal met $\mathrm{ggd}(p, n) \neq 1$.

Besluit. Een natuurlijke macht van een irrationaal getal is niet noodzakelijk irrationaal.

3. Algebraïsche en transcendente getallen

In wat volgt noteren we de verzameling van alle veeltermen in één veranderlijke x met rationale coëfficiënten als $\mathbb{Q}[x]$. Voluit:

$$\mathbb{Q}[x] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{Q}\}$$

Definitie (Euler). Een complex getal a is algebraïsch als er een veelterm $A(x) \in \mathbb{Q}[x]$ bestaat waarvoor $A(a) = 0$. Elk reëel getal dat niet algebraïsch is, noemt men tanscendent[1]

Voorbeelden.

(1) Het getal $\sqrt{2}$ voldoet aan de vergelijking $x^2 - 2 = 0$. Dus noemen we $A(x) = x^2 - 2$, dan is $A(x) \in \mathbb{Q}[x]$ en $A(\sqrt{2}) = 0$. Hieruit volgt dat $\sqrt{2}$ algebraïsch is (en dus niet transcendent).

(2) Elk rationaal getal p/q is algebraïsch, want het voldoet aan de veeltermvergelijking met rationale coëfficienten $x - p/q = 0$.

(3) Elke reële n-de machtswortel van een rationaal getal p/q is algebraïsch, want het voldoet aan de veeltermvergelijking met rationale coëfficienten $x^n - p/q = 0$.

(4) Het complex getal i is algebraïsch, want het voldoet aan de veeltermvergelijking met rationale coëfficienten $x^2 + 1 = 0$.

[1]Men gaat eenvoudig na dat $a \in \mathbb{R}$ algebraïsch is als en slechts als er een veelterm $A(x) \in \mathbb{Z}[x]$ bestaat waarvoor $A(a) = 0$.

Men heeft zich lange tijd afgevraagd of er wel transcendente getallen bestaan. In 1844 gaf Joseph Liouville hier een bewijs voor, en enkele jaren later gaf hij een decimale voorstelling van een transcendent getal:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 10^{-k!} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^{24}} + \ldots = 0,110001000000000000000001000\ldots$$

In 1873 bewees Charles Hermite dat het getal $e = 2,71828182\ldots$ transcendent is [3]. In 1874 toonde Georg Cantor aan dat de verzameling van algebraïsche getallen aftelbaar is[2]. Aangezien $\mathbb{R}$ overaftelbaar is, volgt hieruit dat de verzameling van de transcendente getallen overaftelbaar is.

In 1882 wist Ferdinand von Lindemann de bewijsmethode van Hermite uit te breiden, en bewees dat e^a transcendent is voor elk algebraïsch getal $a \neq 0$ [2, 3]. Bijgevolg zijn bijvoorbeeld de getallen e^2, $e^{\sqrt{2}}$ en e^i transcendent. Omdat $e^{\ln 2} = 2$ niet transcendent is, kan $\ln 2$ niet algebraïsch zijn, en dus is $\ln 2$ transcendent. Analoog bewees Lindemann dat π transcendent is, omdat $\left(e^i\right)^\pi = e^{\pi i} = -1$ niet transcendent is.

Vermeldenswaardig tenslotte is de zogenaamde constante van Champernowne, beschreven door David Gawen Champernowne in 1933, als het getal waarbij een decimale voorstelling bestaat uit de opeenvolgende natuurlijke getallen

$$0,1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11\,12\,13\,14\,15\,16\ldots$$

De transcendentie werd in 1961 bewezen door Kurt Mahler.

In wat volgt zullen we steunen op het feit dat het product van twee algebraïsche getallen terug een algebraïsch getal is. Dit volgt uit de eigenschap dat de verzameling van algebraïsche getallen, voorzien van de optelling en vermenigvuldiging als complexe getallen, een veld is[3].

4. Natuurlijke machten van transcendente getallen

Uit de bespreking in paragraaf 3 volgt nu eenvoudig de volgende

Eigenschap 2. Zij a een transcendent getal. Dan geldt:

$$a, a^2, a^3, \ldots \text{ zijn irrationale getallen}$$

Bewijs. Kies een natuurlijk getal $k > 0$, en veronderstel uit het ongerijmde dat a^k een rationaal getal is. Dan bestaan er natuurlijke getallen p, q met $q \neq 0$ zodat $a^k = p/q$. We vinden

$$a^k = \frac{p}{q} \quad \Rightarrow \quad a^k - \frac{p}{q} = 0$$

[2]Een bewijs verloopt als volgt: (1) het aantal nulwaarden van een gegeven rationale veelterm is eindig, en dus aftelbaar; (2) voor een gegeven graad n is er een bijectie tussen de veeltermen van graad n en de verzameling $\mathbb{Q}_0 \times \mathbb{Q}^n$, hetgeen aftelbaar is; (3) voor de keuze van de graad van een veelterm zijn er aftelbaar veel mogelijkheden.

[3]Een bewijs hiervoor steunt op de theorie van de algebraïsche velduitbreidingen van $\mathbb{Q}$. Een alternatief maakt gebruik van de zogenaamde resultant van twee veeltermen, gedefinieerd als de determinant van de Sylvester matrix van deze veeltermen. Voor meer informatie verwijzen we naar [1].

en dus voldoet a aan de veeltermvergelijking met rationale coëfficiënten $x^k - p/q = 0$. Dit is in tegenspraak met het gegeven dat a een transcendent getal is. We besluiten dat a^k een irrationaal getal is. $\square$

Uit deze eigenschap volgt dus dat de machten $\pi^2, \pi^3, \pi^4, \ldots$ allen irrationaal zijn. Men kan zich nu ook de vraag stellen of deze machten allen transcendent zijn. Een antwoord op die vraag wordt gegeven door de volgende

Eigenschap 3. Zij a een transcendent getal. Dan geldt:

$$a, a^2, a^3, \ldots \text{ zijn transcendente getallen}$$

Bewijs. Kies een natuurlijk getal $k > 0$, en veronderstel uit het ongerijmde dat a^k een algebraïsch getal is. Dan bestaat er een veelterm $A(x) \in \mathbb{Q}[x]$ waarvoor $A(a^k) = 0$. Schrijven we

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

met $n \in \mathbb{N}$ en $a_i \in \mathbb{Q}$, dan betekent $A(a^k) = 0$ voluit dat

$$a_0 + a_1 a^k + a_2 \left(a^k\right)^2 + \ldots + a_n (a^k)^n = 0$$

of nog,

$$a_0 + a_1 a^k + a_2 a^{2k} + \ldots + a_n a^{nk} = 0$$

zodat a voldoet aan de veeltermvergelijking met rationale coëfficiënten

$$\underbrace{a_0 + a_1 x^k + a_2 x^{2k} + \ldots + a_n x^{nk}}_{A(x^k)} = 0$$

Dit is in tegenspraak met het gegeven dat a een transcendent getal is. We beluiten dat a^k een transcendent getal is. $\square$

Besluit. Een natuurlijke macht van een transcendent getal is noodzakelijk transcendent, en dus ook irrationaal.

5. Rationale machten van transcendente getallen

Het bewijs van eigenschap 2 laat zich eenvoudig veralgemenen tot

Eigenschap 4. Zij a een transcendent getal en $r \in \mathbb{Q}_0$. Dan is a^r een irrationaal getal.

Bewijs. Kies een rationaal getal $r = n/m$ (met $m, n \in \mathbb{Z}_0$ onderling ondeelbaar), en veronderstel uit het ongerijmde dat a^r een rationaal getal is. Dan bestaan er natuurlijke getallen p, q met $q \neq 0$ zodat $a^r = p/q$. We vinden

$$a^r = \frac{p}{q} \quad \Rightarrow \quad (a^r)^m - \left(\frac{p}{q}\right)^m = 0$$

en dus voldoet a aan de rationale vergelijking $x^n - p^m/q^m = 0$. Dit is in tegenspraak met het gegeven dat a een transcendent getal is. We besluiten dat a^r een irrationaal getal is. $\square$

Uit deze eigenschap volgt dus dat getallen zoals $\sqrt{\pi}$ en $\sqrt[3]{\pi^{17}}$ ook irrationaal zijn. Men kan zich nu ook de vraag stellen of deze rationale machten van π ook transcendent zijn.

Eigenschap 5. Zij a een transcendent getal en $r \in \mathbb{Q}_0$. Dan is a^r een transcendent getal.

Bewijs. Wegens eigenschap 3 volstaat het om aan te tonen dat een (reële) n-de machtswortel van een transcendent getal terug transcendent is. Neem daartoe $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0, 1$ en stel uit het ongerijmde dat $\sqrt[n]{a}$ algebraïsch is. Dan is het opeenvolgend product van algebraïsche getallen

$$\underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a}}_{n \text{ keer}} = a$$

ook algebraïsch, in tegenspraak met het gegeven. We besluiten dat $\sqrt[n]{a}$ transcendent is, en dus ook elke rationale macht a^r. $\square$

Besluit. Een rationale macht van een transcendent getal is noodzakelijk transcendent, en dus ook irrationaal.

6. Irrationaliteit van andere getallen en open problemen

Het onderzoek naar de irrationaliteit en transcendentie van getallen kende in 1934 een grote sprong voorwaarts, toen Aleksandr Gelfond and Theodor Schneider onafhankelijk van elkaar het volgend resultaat aantoonden.

Stelling (Gelfond-Schneider). Zij $a, b \in \mathbb{R}$. Dan geldt

$$\left.\begin{array}{r} a \text{ en } b \text{ algebraïsch} \\ a \notin \{0,1\} \\ b \text{ irrationaal} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad a^b \text{ transcendent}$$

Hun resultaat toont de transcendentie en dus ook irrationaliteit aan onder andere $2^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ en $e^{\pi} = i^{-2i}$. Samen met de voorbeelden vermeld in paragraaf 3 weerleggen ze een aantal beweringen over andere machten van transcendente getallen. Zo blijkt uit $\left(2^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 4$, $(e^{\pi})^i = -1$ en $e^{\ln 2} = 2$ ons laatste

Besluit. Een irrationale macht, reëel of complex algebraïsche macht of transcendente macht van een transcendent getal is niet noodzakelijk irrationaal.

Het is echter nog steeds onbekend of $\pi + e$ of $\pi - e$ irrationaal zijn of niet. In feite is er geen enkel paar (m, n) van niet-nul gehele getallen m, n bekend waarvoor men weet of $m\pi + ne$ irrationaal is of niet. Verder is het ook onbekend of 2^e, π^e of $\pi^{\sqrt{2}}$ al dan niet irrationaal zijn.

Referenties

[1] S. Lang, *Algebra*, 3th edition, Addison-Wesley, New-York, 1993.

[2] J. Sondow, D. Marques, *Algebraic and transcendental solutions of some exponential equations*, Annales Mathematicae et Informaticae **37** (2010) 151-164; beschikbaar op `http://arxiv.org/pdf/1108.6096.pdf`.

[3] D. J. Struik, *Geschiedenis van de wiskunde*, vierde druk, Uitgeverij Het Spectrum, Utrecht, 2001.

Koen De Naeghel, Onze-Lieve-Vrouwecollege, Collegestraat 24, 8310 Brugge.

E-mail address: `koendenaeghel@hotmail.com`