Vijf bewijzen voor de irrationaliteit van $\sqrt{2}$

Een verslag ten dienste van de leerlingen van 5aGWi8-5aLWi8-5bWWi8 door

Koen De Naeghel

Onze-Lieve-Vrouwecollege Assebroek, 27 februari 2011

Samenvatting

In dit verslag bespreken we enkele (alternatieve) bewijzen van het feit dat $\sqrt{2}$ een irrationaal getal is.

Inhoudsopgave

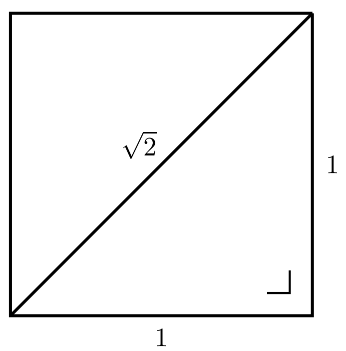
1 Inleiding

In een vierkant met zijde 1 hebben de diagonalen een lengte d waarvoor het kwadraat gelijk is aan 2. Immers, samen met twee aanliggende zijden vormt een diagonaal een rechthoekige driehoek, en uit de stelling van Pythagoras volgt

$$1^2 + 1^2 = d^2 \quad \Rightarrow \quad d^2 = 2$$

Lengte is positief, dus $d > 0$. Het getal d noemt men de (positieve) vierkantswortel van 2, en noteert men met $\sqrt{2}$. De decimale voorstelling van $\sqrt{2}$ begint als volgt:

$$\sqrt{2} = 1,414\ 213\ 562\ 373\ 095\ 048\ 801\ 688\ 724\ 209\ \ldots$$



De Pythagoreërs[1] ontdekten dat de lengte $d = \sqrt{2}$ van zo'n diagonaal zich niet rationaal verhoudt tot de lengtes der zijden. Dit is wat men bedoelt met <u>$\sqrt{2}$ is een irrationaal getal</u>: er bestaan geen natuurlijke getallen m, n waarvoor geldt dat $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$.

[1] Het eerste bewijs van het bestaan van irrationale getallen wordt meestal toegeschreven aan een wiskundige uit de Pythagoraeïsche school (mogelijk Hippasus van Metapontum). Hippasus werd niet geprezen voor zijn bewijs: volgens een legende deed hij zijn ontdekking terwijl hij op zee was, en zijn collega Pythagoreërs zouden hem vervolgens prompt over boord hebben gekieperd. Dit voor het feit dat hij een element in het universum had gevonden dat de leer ontkende dat alle fenomenen in het heelal kunnen worden teruggebracht tot gehele getallen en hun verhoudingen.

Waarom vonden de Pythagoreërs het bestaan van irrationale getallen zo afstotelijk? Omdat zij ervan overtuigd waren dat elk lijnstuk $[AB]$ kan vergeleken worden met een lijnstuk met lengte 1, en wel als volgt:

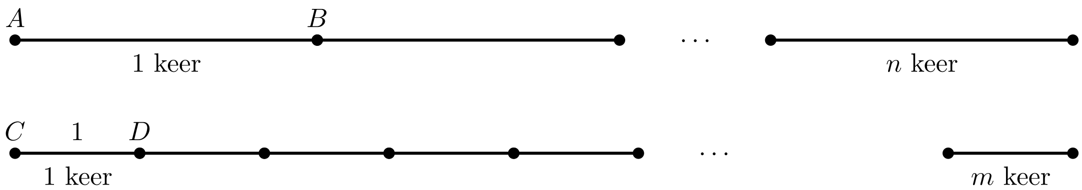
(1) Teken onder lijnstuk $[AB]$ een lijnstuk $[CD]$ met lengte 1.

(2) Als je na m herhalingen van het lijnstuk $[CD]$ de lengte van het lijnstuk $[AB]$ bekomt, dan is $|AB| = m \cdot 1 = m$. Als dat niet zo is: verdubbel lijnstuk $[AB]$.

  (2.1) Als je na m herhalingen van het lijnstuk $[CD]$ het dubbele van de lengte van het lijnstuk $[AB]$ bekomt, dan is $2|AB| = m \cdot 1$, dus $|AB| = \dfrac{m}{2}$.

  (2.2) Als dat niet zo is: beschouw het drievoud van het lijnstuk $[AB]$.

    (2.2.1) etc.



De lijnstukken $[CD]$ die op deze manier in een eindig aantal stappen kunnen gemeten worden, voldoen aan $n \cdot |AB| = m \cdot 1$, dus $|AB| = \dfrac{m}{n}$ waarbij n het aantal herhalingen van $[AB]$ en m het aantal herhalingen van $[CD]$ is. Tot verbazing van de Pythagoreërs waren er lijnstukken die niet op deze manier kunnen gemeten worden.

2 Klassiek bewijs

Het klassiek bewijs van de irrationaliteit van $\sqrt{2}$ gaat terug naar Aristoteles, en verscheen in het boek *Elementen* van Euclides.

Eerste bewijs. Onderstel uit het ongerijmde dat er een rationaal getal $r \in \mathbb{Q}$ is waarvoor $r^2 = 2$. We schrijven

$$r = p/q \quad \text{met} \quad p, q \in \mathbb{Z}$$

en we mogen onderstellen dat p en q onderling priem zijn i.e. ze hebben geen delers gemeen (behalve 1 en -1). Dan is $p^2 = 2q^2$. Omdat 2 een deler is van $2q^2$ is dus 2 ook een deler van p^2. Omdat 2 een priemgetal is, is 2 meteen ook een deler van p, dus $p = 2s$ voor een geheel getal s. Substitueren in $p^2 = 2q^2$ levert $4s^2 = 2q^2$ dus $2s^2 = q^2$. Er volgt dat 2 een deler is van q^2 en dus ook van q. Een strijdigheid met onze onderstelling dat p en q geen deler gemeen hadden. We besluiten dat $\sqrt{2}$ irrationaal is. $\square$

Een uitbreiding van dit bewijs levert dat $\sqrt{n}$ irrationaal is voor elk natuurlijk getal n dat niet het kwadraat is van een natuurlijk getal.

3 Grondstelling van de getallenleer

Het volgend bewijs steunt op de eigenschap dat elk geheel getal te schrijven is als een product van priemgetallen. Bovendien is deze schrijfwijze, op de tekens en de volgorde van de priemen na, uniek.

Voorbeeld.

$$-15 = (-5).3 = 5.(-3) = (-3).5 = 3.(-5)$$

Deze stelling staat bekend als de Grondstelling uit de getallenleer en wordt toegewezen aan Euclides[2].

Tweede bewijs. Onderstel uit het ongerijmde dat er een rationaal getal $r \in \mathbb{Q}$ is waarvoor $r^2 = 2$. We schrijven

$$r = p/q \quad \text{met} \quad p, q \in \mathbb{Z}$$

Dan is $p^2 = 2q^2$. Nu ontbinden we p en q in een product van priemgetallen. Elk priemgetal in de ontbinding van p komt tweemaal voor in de ontbinding van p^2, dus p^2 heeft een even aantal priemfactoren. Analoog heeft q^2 een even aantal priemfactoren. Maar dan heeft $2q^2$ een oneven aantal priemfactoren. Strijdig met het feit dat $p^2 = 2q^2$ want p^2 heeft een even aantal priemfactoren. $\square$

[2] Hoewel Euclides dit nergens expliciet neergeschreven had. Deze eigenschap werd voor het eerst geformuleerd door Gauss 1801 in zijn baanbrekende doctoraatsthesis *Disquisitiones arithmeticae*.

4 Onderling priem

Het derde bewijs maakt gebruik van de volgende eigenschap: als twee gehele getallen geen priemfactoren gemeen hebben, dan hebben hun kwadraten ook geen priemfactoren gemeen.

Derde bewijs. Onderstel uit het ongerijmde dat er een rationaal getal $r \in \mathbb{Q}$ is waarvoor $r^2 = 2$. We schrijven

$$r = p/q \quad \text{met} \quad p, q \in \mathbb{Z}$$

en we mogen onderstellen dat p en q onderling priem zijn i.e. ze hebben geen delers gemeen (behalve 1 en -1). We mogen tevens onderstellen dat $q \neq 1$ en $q \neq -1$, anders zou er een geheel getal p zijn waarvoor $p^2 = 2$ wat duidelijk nonsens is. Zeggen dat p en q geen deler gemeen hebben betekent: als we de priemontbinding van p en q neerschrijven als

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k \quad \text{en} \quad q = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_l$$

dan is er geen enkele p_i (met $1 \leq i \leq k$) gelijk aan een q_j (voor $1 \leq j \leq l$). Dus hebben ook p^2 en q^2 geen priemdelers gemeen hebben in hun priemontbinding. Met andere worden, we kunnen niet schrappen in de breuk p^2/q^2, laat staan dat we deze kunnen schrappen tot we 2 bekomen! $\square$

5 Meetkundig bewijs en de algebraïsche tegenhanger

Hier bespreken we een meetkundige constructie die de irrationaliteit van $\sqrt{2}$ aantoont. Het meetkundig bewijs gaat terug naar de Griekse oudheid. Voor de duidelijkheid volgt eerst de algebraïsche tegenhanger.

5.1 Algebraïsch bewijs

Vierde bewijs. Onderstel uit het ongerijmde dat we een $p', q' \in \mathbb{N}$ kunnen vinden waarvoor $\sqrt{2} = p'/q'$. Van al zo'n mogelijke paren (p', q') nemen we het paar (p, q) waarvoor de q minimaal is. Met andere woorden, noemen we S de verzameling

$$S = \{q' \in \mathbb{N} \mid \text{ er bestaat een } p' \in \mathbb{N} \text{ waarvoor } \sqrt{2} = \frac{p'}{q'}\} \subset \mathbb{N}$$

dan is, uit het onderstelde, S niet-ledig en dus kunnen we het minimum van S nemen. Dat minimum noemen we q. Zij $p \in \mathbb{N}$ een bijhorend natuurlijk getal waarvoor $\sqrt{2} = p/q$. Dan volgt uit de ongelijkheden $1 < \sqrt{2} < 2$ gemakkelijk dat $q < p$ en $p < 2q$. Uit dat laatste volgt $p - q < q$. We verkrijgen nu

$$\begin{aligned}
\frac{2q-p}{p-q} &= \frac{2 - \frac{p}{q}}{\frac{p}{q} - 1} && \text{deel teller en noemer door } q \\
&= \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} && \text{want } \sqrt{2} = \frac{p}{q} \\
&= \frac{(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} && \text{vermenigvuldig teller en noemer met } \sqrt{2}+1 \\
&= \frac{2\sqrt{2} + 2 - (\sqrt{2})^2 - \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2 - 1} \\
&= \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Maar dan is $\dfrac{2q-p}{p-q} \in S$, waarbij de noemer strikt kleiner is dan q. Strijdig, want q is het minimum van S. $\square$

5.2 Meetkundig bewijs

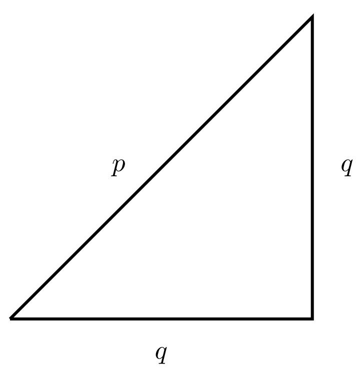
Hier volgt het bewijs waarmee Griekse meetkundigen bewezen dat $\sqrt{2}$ irrationaal is. Het achterliggend idee is: gegeven een gelijkbenige rechthoekige driehoek waarvan alle zijden natuurlijke getallen zijn, dan kan men steeds een kleinere gelijkbenige rechthoekige driehoek kan construeren waarvoor alle zijden nog steeds natuurlijke getallen zijn.

Vijfde bewijs. Onderstel uit het ongerijmde $2 = p^2/q^2$ met $p, q \in \mathbb{N}$ waarbij q terug minimaal is.

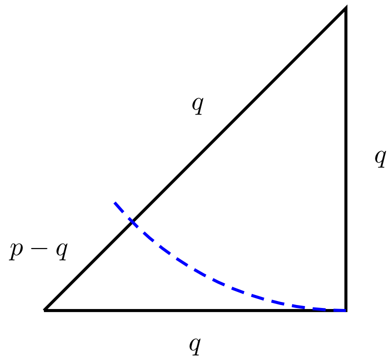
Stap 1. Er bestaat een rechthoekige driehoek waarbij de lengte van elke rechthoekszijde p is, en de lengte van de schuine zijde q is.

Inderdaad, uit $2 = p^2/q^2$ volgt $q^2 + q^2 = p^2$, en wegens de Stelling van Pythagoras volgt het bestaan van zo'n driehoek.

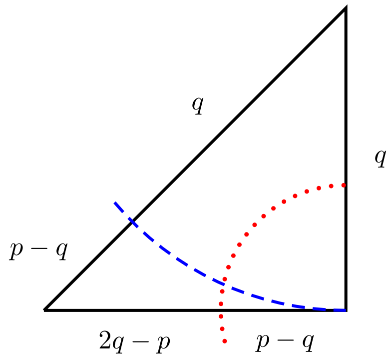
Merk op dat zo'n rechthoekige driehoek ook gelijkbenig is, en dat de zijden als lengte natuurlijke getallen hebben. Omdat we q minimaal hebben gekozen, is dit deze driehoek de kleinste rechthoekige gelijkbenige driehoek waarvoor de zijden natuurlijke getallen zijn.



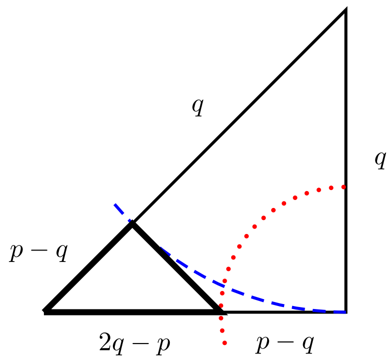
Stap 2. Met behulp van een passer verdelen we de schuine zijde in twee lijnstukken, waarvan de lengte van het ene gelijk is aan q, en dus is de lengte van het andere gelijk is aan $p - q$.



Stap 3. Met behulp van een passer verdelen we een rechthoekszijde in twee lijnstukken, waarvan de lengte van het ene gelijk is aan $p - q$, en dus is de lengte van het andere gelijk is aan $q - (p - q) = 2q - p$.



Stap 4. Door de geconstrueerde punten te verbinden vormt zich een nieuwe, kleinere driehoek. We beweren dat deze driehoek een rechthoekige, gelijkbenige driehoek is waarvoor de zijden de natuurlijke getallen zijn en waarvoor de lengte van de rechthoekszijde strikt kleiner dat q is. Dit zal in strijd zijn met het feit dat dat q minimaal is.



Om aan te tonen dat de kleine driehoek rechthoekig en gelijkbenig is, volstaat het om aan te tonen dat de kleine driehoek gelijkvormig is met de grote driehoek. De vraag is dus of de volgende verhoudingen van de lengtes van de volgende zijden gelijk zijn:

$$\frac{\text{korte zijde grote}}{\text{korte zijde kleine}} \stackrel{?}{=} \frac{\text{lange zijde grote}}{\text{lange zijde kleine}}$$

dit is equivalent met de vraag:

$$\frac{q}{p-q} \stackrel{?}{=} \frac{p}{2q-p}$$

Maar dit gelijkwaardig met $2 = \dfrac{p^2}{q^2}$, precies onze veronderstelling! We besluiten dat de kleine driehoek gelijkvormig is met de grote, en dus rechthoekig en gelijkbenig is.

□

6 Irrationaliteit van andere getallen en open problemen

In 1761 bewees Lambert dat $\pi = 3,14\ldots$ en $e = 2,71\ldots$ irrationaal zijn, alsook e^r voor $r \in \mathbb{Q}, r \neq 0$. Dit laatste was nogal een dubieus bewijs en werd op punt gezet door Legendre in 1794. Nadien werd de irrationaliteit van andere getallen en combinaties aangetoond, zoals π^r (voor $r \in \mathbb{Q}, r \neq 0$) en e^π. Een grote sprong voorwaarts werd in 1934 gemaakt door Gelfond en Schneider. Zij toonden onafhankelijk van elkaar aan dat a^b steeds een irrationaal getal is, zolang (1) a en b oplossingen zijn van een vergelijking met gehele coëfficiënten en, (2) $a \neq 0$ en $a \neq 1$, en (3) b een irrationaal getal is. Hun resultaat toont de irrationaliteit aan onder andere

$$2^{\sqrt{2}} \qquad \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \qquad 2^{\pi} \qquad 2^{e} \qquad \ldots$$

Het is echter nog steeds onbekend of $\pi + e$ of $\pi - e$ irrationaal zijn of niet. Infeite is er geen enkel paar (m, n) van niet-nul gehele getallen m, n bekend waarvoor men weet of $m\pi + ne$ irrationaal is of niet. Verder is het ook onbekend of 2^e, π^e of $\pi^{\sqrt{2}}$ al dan niet irrationaal zijn.