

UNIVERSIDAD DE CONCEPCION  
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS  
DEPARTAMENTO DE FISICA

# Gravitación invariante de (A)dS en altas dimensiones

Tesis para optar al grado académico  
de Magíster en Ciencias  
con mención en Física

por

Eduardo Antonio Rodríguez Salgado



Agosto, 2003

Director de Tesis : Dr. Patricio Salgado

Comisión : Dr. Mauricio Cataldo  
Dr. Guillermo Rubilar  
Dr. Ricardo Troncoso

*a mi madre  
y a la memoria de mi padre*



# Agradecimientos

Quisiera agradecer en primer lugar a quienes han sido mis profesores. A Jaime Araneda, Mauricio Cataldo, Sergio del Campo, Juan Rivera, Luis Roa y Carlos Saavedra, por todas las clases y todas las consultas y la buena disposición para recibirlos. Muy especialmente también a Enrique Oelker, Patricio Salgado y Jorge Zanelli, a quienes debo mi concepto de lo que una clase excelente debe ser. Estoy en deuda con ellos por eso y por todos los conocimientos que me han transmitido durante estos años. Agradezco a Ricardo Troncoso por muchas enriquecedoras conversaciones, y a Guillermo Rubilar por su cuidadosa revisión del borrador de la tesis y sus valiosas sugerencias, así como por su ayuda con los arcanos de  $\text{\LaTeX}$ .

Mi sincero agradecimiento va también a mis compañeros de estudios: a Marcelo Alid, Carla Baldovin, Patricio Mella y César Sánchez, por el buen humor, el apoyo, y el entusiasmo. A Ruth Sandoval, por el compañerismo y la amistad, y por conservar siempre una sonrisa en el fondo del alma. A Fernando Izaurieta, por las discusiones bizantinas y las no tanto, por las incalculables risas y por todo lo que he aprendido de él y con él.

Mi reconocimiento también es para las secretarias del Departamento de Física; Marta Astudillo, Patricia Luarte y Marcela Sanhueza, así como también para los auxiliares, Heraldó Manríquez y Víctor Mora.

Finalmente, mi familia y mi esposa han constituido el baluarte de mi vida, y a ellos va mi más profundo agradecimiento: a mis padres, por su apoyo, su amor y su fe incondicionales; a mi hermana, por su cariño y su sonrisa. Esta tesis no habría sido posible sin el amor, el apoyo incondicional y la comprensión de mi esposa. A ella va todo mi amor.

Mi dedicación exclusiva al Programa de Doctorado fue posible gracias a una beca de docencia de la Escuela de Graduados de la Universidad de Concepción (2001) y a una beca de la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica, CONICYT (2002-2003).



# Resumen

En esta tesis consideramos una extensión a la Teoría General de la Relatividad de Einstein en una dimensión  $d$  por medio del formalismo de Stelle-West. En el tratamiento de primer orden para gravitación, el vielbein  $e^a$  y la conexión de spin  $\omega^{ab}$  son considerados como campos independientes. En el contexto de este formalismo, la gravitación ha podido ser escrita como una teoría de gauge del grupo de (anti)-de Sitter sólo en dimensiones impares. En este trabajo introducimos un nuevo campo, llamado la “Coordenada de (A)dS”  $\zeta^a$ , el cual transforma como vector bajo rotaciones locales de Lorentz y es trasladado bajo un boost de (A)dS. Este campo es usado para construir nuevas variables  $V^a$  y  $W^{ab}$ , las cuales toman el lugar del vielbein y la conexión de spin en la acción de Lanczos-Lovelock. El resultado es una teoría de la gravitación en cualquier dimensión cuya acción es invariante bajo el grupo de (A)dS. Los coeficientes de los distintos términos de la acción son los mismos que aquellos escogidos en la ref. [3], y garantizan que la teoría tenga un único estado vacío, con curvatura constante. Demostramos asimismo que la reducción dimensional de la acción de Lovelock-Born-Infeld en cuatro dimensiones conduce a la acción de Euler-Chern-Simons en tres dimensiones. En dimensiones más altas es necesario introducir una hipótesis adicional concerniente a la dependencia del vielbein en la dimensión que está siendo compactificada.



# Abstract

In this thesis we consider an extension to Einstein's General Theory of Relativity in any dimension  $d$  by means of the so-called Stelle-West formalism. In the first order approach to gravity, the vielbein  $e^a$  and the spin connection  $\omega^{ab}$  are taken to be independent fields. Within this formalism, gravity has been cast as a gauge theory for the (A)dS group in odd dimensions only. In this work we introduce a new field called the "AdS coordinate"  $\zeta^a$  which transforms as a vector under local Lorentz rotations and gets shifted under an (A)dS boost. This field is used to construct new variables  $V^a$  and  $W^{ab}$ , which take the place of the vielbein and the spin connection in the Lanczos-Lovelock action. The result is a theory of gravity in any dimension which is invariant under the (A)dS group. The coefficients of the different terms of the action are the same as those of ref. [3], and guarantee that the theory has a unique vacuum state, with constant curvature. We also show that the dimensional reduction of the Lovelock-Born-Infeld action in four dimensions leads to the Euler-Chern-Simons action in three dimensions. An additional hypothesis, concerning the dependence of the vielbein on the coordinate that it is being compactified, is needed in higher dimensions.



# Contenidos

Agradecimientos	I
Resumen	III
Abstract	v
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Variedades y Campos Tensoriales</b>	<b>5</b>
2.1. Variedades . . . . .	5
2.2. El Espacio Tangente . . . . .	6
2.3. Tensores y Formas Diferenciales . . . . .	8
2.4. Breve Introducción a las Formas Diferenciales . . . . .	10
2.5. La derivada de Lie . . . . .	12
<b>3. Relatividad General</b>	<b>15</b>
3.1. Relatividad General en el formalismo de Einstein . . . . .	15
3.2. El Vielbein y el grupo de Lorentz . . . . .	21
3.3. Torsión y Curvatura . . . . .	23
3.4. Relatividad General en el formalismo de Cartan . . . . .	28
<b>4. Teorías de Gauge</b>	<b>33</b>
4.1. Formalismo General . . . . .	33
4.2. El grupo de Poincaré . . . . .	37
<b>5. Gravitación en dimensiones mayores</b>	<b>41</b>
5.1. Más allá de Einstein-Hilbert: los lagrangeanos de Lovelock . . . . .	42
5.2. Ecuaciones de movimiento para la acción de Lovelock . . . . .	44
5.3. El problema de los coeficientes . . . . .	46

5.3.1.	Coeficientes para dimensiones impares . . . . .	47
5.3.2.	Coeficientes para dimensiones pares . . . . .	50
<b>6.</b>	<b>Gravitación invariante bajo el grupo de Poincaré</b>	<b>53</b>
6.1.	Gravedad cuatridimensional invariante bajo el grupo de Poincaré . .	54
6.2.	Gravedad en dimensiones pares invariante bajo el grupo de Poincaré .	57
<b>7.</b>	<b>Gravitación invariante bajo el grupo de (anti-) de Sitter</b>	<b>59</b>
7.1.	La conexión no lineal . . . . .	59
7.2.	El formalismo de Stelle y West . . . . .	61
7.3.	Gravitación invariante bajo el grupo de anti-de Sitter . . . . .	64
7.3.1.	Ecuaciones de movimiento para la acción de Lovelock . . . . .	65
7.3.2.	Cargas conservadas para la acción de Lovelock . . . . .	67
<b>8.</b>	<b>La Reducción Dimensional</b>	<b>71</b>
8.1.	Métodos de Reducción Dimensional . . . . .	72
8.1.1.	Método I . . . . .	72
8.1.2.	Método II . . . . .	73
8.2.	De cuatro a tres dimensiones . . . . .	74
8.2.1.	Método I . . . . .	75
8.2.2.	Método II . . . . .	76
8.3.	De $d = 2n$ a $d = 2n - 1$ . . . . .	77
8.3.1.	Método I . . . . .	77
8.3.2.	Método II . . . . .	78
8.4.	Tercera Alternativa de Reducción Dimensional . . . . .	80
8.5.	Análisis de la Reducción Dimensional . . . . .	81
<b>A.</b>	<b>Notación y Convenciones</b>	<b>85</b>
<b>B.</b>	<b>El tensor <math>\delta_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_r}</math></b>	<b>87</b>
<b>C.</b>	<b>El grupo de (anti-) de Sitter</b>	<b>89</b>
<b>D.</b>	<b>Identidades Triangulares</b>	<b>91</b>
<b>E.</b>	<b>Cálculo de <math>V^a</math> y <math>W^{ab}</math></b>	<b>93</b>
<b>F.</b>	<b>Cálculo de <math>\delta\zeta^a</math> y <math>h</math> para un boost de AdS</b>	<b>95</b>

G. Una representación matricial para el grupo de traslaciones	99
H. El Teorema de Noether	101



# Capítulo 1

## Introducción

Dos interacciones fundamentales —gravitación y electromagnetismo— eran todo cuanto se conocía a comienzos del siglo XX. Ambas tienen una historia conocida; el estudio de la interacción gravitacional se remonta a Galileo y Newton, siendo este último quien concibió una teoría matemática que perduró más de dos siglos y aún es referente obligado para todos quienes se aproximan al estudio de la física. Por su lado, el entendimiento de las interacciones electromagnéticas avanzó de la mano de Faraday y Maxwell, entre otros. En este caso fue Maxwell quien proveyó de un marco teórico unificado con el cual podían explicarse los fenómenos eléctricos y magnéticos. Menos conocida es la historia de H. Weyl [21], quien en 1918 propuso una unificación geométrica de la Teoría General de la Relatividad de Einstein y la Electrodinámica de Maxwell. Aunque la teoría de Weyl no prosperó en su forma original, sí tuvo el enorme mérito de introducir la idea de *invariancia de gauge* como un principio de simetría del cual podía deducirse la teoría electromagnética.

Cuatro interacciones fundamentales son actualmente reconocidas por la comunidad científica. A las ya mencionadas interacciones gravitacional y electromagnética se han agregado las así llamadas interacciones débil y fuerte. Estas se hallan muy separadas de nuestra experiencia cotidiana, ya que son importantes sólo en el dominio subatómico. Tanto la electrodinámica como las interacciones débil y fuerte son actualmente entendidas como teorías de gauge en el sentido originalmente dado por Weyl. Más aún, todas ellas han sido cuantizadas exitosamente. Esto significa que a partir de la teoría clásica original es posible construir una teoría cuántica asociada que permite calcular correcciones a las predicciones clásicas. Estas predicciones pueden ser hechas finitas —en lenguaje técnico, las teorías son *renormalizables*—, y numerosos experimentos han confirmado su exactitud, en ocasiones con grados asombrosos de precisión. Nada de esto es válido para la gravitación. La versión

cuántica de la teoría general de la relatividad conduce a infinitos que no pueden ser tratados perturbativamente, aun cuando la teoría podría ser finita fuera del alcance del análisis perturbativo. Esta crucial diferencia resulta particularmente sorprendente cuando notamos que la relatividad general está construida sobre el principio de invariancia bajo transformaciones generales de coordenadas, el cual es una simetría similar a la simetría de gauge. Sin embargo, en el análisis final notamos que el campo fundamental de la relatividad general, la métrica del espacio-tiempo, no puede ser interpretado como una conexión en un fiber bundle, dado que es un campo que vive en la variedad base. Estas consideraciones pueden parecer excesivamente técnicas para ser fundamentales, pero lo cierto es que la demostración de la renormalizabilidad de las teorías de gauge descansa en gran medida en esta clase de propiedades [29].

En el formalismo de primer orden, el vielbein y la conexión son considerados como campos independientes. El primero describe las características métricas del espacio-tiempo, en tanto que el segundo da cuenta de sus propiedades afines. Estos campos pueden ser interpretados como componentes de una conexión para el grupo de Poincaré o los grupos de de Sitter y anti-de Sitter. En este contexto, la formulación de la Relatividad General como una teoría de gauge falla debido a que la acción de Einstein-Hilbert no es invariante bajo traslaciones locales de Poincaré (o boosts de (A)dS, según corresponda).

En años recientes, la teoría de cuerdas [22] se ha perfilado como candidata a una teoría unificada para las cuatro interacciones fundamentales. Por otro lado, la teoría de Supergravedad [8] intenta dar una versión cuántica de la relatividad general, usando el concepto de supersimetría. A pesar de los distintos enfoques utilizados, todas estas teorías comparten la característica de estar formuladas en alguna dimensión espacio-temporal superior a cuatro, como diez u once. Así, la posibilidad de que el espacio-tiempo tenga una dimensionalidad más alta ha pasado a constituir una hipótesis usual en la física de altas energías. Por supuesto, cualquier teoría formulada en una dimensión superior debe ser capaz de reproducir la fenomenología cuatridimensional que observamos; esto es llevado a cabo por medio de un proceso de reducción dimensional.

En esta tesis tratamos una teoría para la gravitación en  $d$  dimensiones utilizando una generalización del lagrangeano de Einstein-Hilbert debida a D. Lovelock [16] (ver también [6]). En cualquier número de dimensiones, el lagrangeano de Lovelock es un polinomio local del vielbein y la curvatura, el cual es invariante bajo rotaciones locales de Lorentz en el espacio tangente. En dimensiones impares existe una elección de los coeficientes del polinomio tal que el lagrangeano adquiere invariancia (módulo una derivada total) bajo el grupo completo de (A)dS, y no sólo bajo rotaciones.

En estos casos, la teoría puede ser verdaderamente interpretada como una teoría de gauge. Una elección análoga de coeficientes en dimensiones pares produce, sin embargo, un lagrangeano que conserva sólo la invariancia bajo transformaciones de Lorentz. Uno de los principales propósitos de esta tesis es mostrar como, mediante la utilización de un formalismo apropiado, es posible escribir una acción para la gravitación invariante bajo transformaciones locales del grupo de (A)dS, sin que sea necesario adoptar un conjunto específico de coeficientes en el lagrangeano de Lovelock.

La tesis está organizada como sigue. En el capítulo 2, se introducen brevemente las herramientas matemáticas del cálculo tensorial y formas diferenciales. En el capítulo 3 revisamos la Teoría General de la Relatividad de Einstein. Esto es llevado a cabo primero en el formalismo tensorial usual y luego a partir del punto de vista de Cartan, utilizando como campos fundamentales formas diferenciales definidas en el espacio tangente. El capítulo 4 está dedicado a presentar los fundamentos de las teorías de gauge, así como la utilización del grupo de Poincaré como grupo de gauge. Este capítulo se beneficia enormemente de la utilización de formas diferenciales; en particular, la conexión para el grupo de gauge es una 1-forma valuada en el álgebra de Lie del grupo. En el capítulo 5 exploramos en detalle las generalizaciones de la acción de Einstein-Hilbert para dimensiones superiores a cuatro. Analizamos separadamente los casos de dimensiones pares e impares. El capítulo 6 está dedicado a la construcción de una acción para gravitación en  $d$  dimensiones invariante bajo transformaciones locales del grupo de Poincaré. El capítulo 7 contiene la generalización al grupo de (anti-)de Sitter; la construcción está basada en la teoría de realizaciones no lineales de grupos de Lie [4, 7, 24, 28]. Deducimos las ecuaciones de movimiento para la teoría y calculamos las cargas conservadas asociadas a las distintas invariancias de la acción. En el capítulo 8 estudiamos la reducción dimensional de la acción de Lovelock-Born-Infeld realizada no linealmente desde una dimensión par arbitraria a la dimensión impar inmediatamente inferior. Esta reducción es llevada a cabo utilizando tres métodos distintos [13, 14]. Estos constituyen un caso particular de reducción de Kaluza-Klein en el cual los campos escalar y vectorial que surgen en la reducción son puestos iguales a cero. Todo el proceso es ilustrado primero en el caso de cuatro a tres dimensiones. Los apéndices contienen la notación y las convenciones, además de detalles acerca de los cálculos involucrados en la tesis. También se presentan una introducción al grupo de (anti-) de Sitter y una deducción del Teorema de Noether, el cual es utilizado para el cálculo de las cargas conservadas.



# Capítulo 2

## Variedades y Campos Tensoriales

*“No entre aquí quien no sepa geometría.”*  
(Platón, 427 a.C. - 347 a.C.)

En este capítulo revisamos algunos de los preliminares matemáticos necesarios para los desarrollos posteriores. Las referencias relevantes son el libro de M. Nakahara [20] y el artículo de Eguchi, Gilkey y Hanson [10]. Una introducción práctica a los tensores y las formas diferenciales puede ser encontrada en el libro de S. Carroll, ref. [5].

### 2.1. Variedades

Una variedad es el concepto matemático preciso para la idea intuitiva de una “superficie suave”. Ejemplos de variedades incluyen la 2-esfera  $S^2$ , el toro  $T^2$  y el espacio de parámetros de cualquier grupo de Lie. En general, una **variedad diferenciable**  $M$  es un espacio topológico que es localmente homeomórfico<sup>1</sup> a  $\mathbb{R}^n$  [20], aun cuando puedan diferir globalmente. Este homeomorfismo local permite asignar coordenadas a los puntos de  $M$ . Cuando  $M$  no es globalmente homeomórfica a  $\mathbb{R}^n$ , puede ser necesario introducir varios sistemas coordenados. Es de este modo posible que un punto en  $M$  tenga varias coordenadas. Requerimos que la transición de una coordenada a la otra sea suave. Este requerimiento permite desarrollar el cálculo usual en una variedad. Es de crucial importancia notar que la elección de

---

<sup>1</sup>*Definición* [20]: Sean  $X_1$  y  $X_2$  espacios topológicos. Un mapeo  $f : X_1 \rightarrow X_2$  es un **homeomorfismo** si es continuo y tiene un inverso  $f^{-1} : X_2 \rightarrow X_1$  que también es continuo. Si existe un homeomorfismo entre  $X_1$  y  $X_2$ , se dice que  $X_1$  es **homeomórfico** a  $X_2$  y viceversa.

las coordenadas es completamente arbitraria, aparte de los requerimientos básicos de continuidad y diferenciabilidad. Esto se corresponde muy bien con los principios de la Teoría General de la Relatividad, como veremos más adelante.

## 2.2. El Espacio Tangente

Consideremos un punto  $P$  en una variedad diferenciable  $M$ , y el conjunto de todas las curvas en  $M$  que pasan por este punto. Cada una de ellas puede ser escrita como  $x^\mu = x^\mu(\lambda)$ , en donde  $\{x^\mu\}$  es un sistema coordenado local y  $\lambda$  es el parámetro de la curva. Este parámetro será usado para etiquetar las curvas; así,  $x^\mu = x^\mu(\lambda)$  y  $x^\mu = x^\mu(\tau)$  representan dos curvas a través de  $P$ . Los operadores de derivación a lo largo de estas curvas,  $d/d\lambda$ ,  $d/d\tau$ , etc., calculados en el punto  $P$  en cuestión, forman un *espacio vectorial*<sup>2</sup>. Esto es, si  $\lambda$ ,  $\tau$  y  $\mu$  etiquetan tres curvas que pasan por  $P$ , entonces los siguientes axiomas [20] son satisfechos:

1.  $d/d\lambda + d/d\tau = d/d\tau + d/d\lambda$ .
2.  $(d/d\lambda + d/d\tau) + d/d\mu = d/d\lambda + (d/d\tau + d/d\mu)$ .
3. La curva  $x^\mu = x^\mu(\tau) = x^\mu(P)$  satisface  $d/d\lambda + d/d\tau = d/d\lambda$ , para toda curva  $x^\mu = x^\mu(\lambda)$ .
4. Para cualquier curva de parámetro  $\lambda$  existe otra de parámetro  $-\lambda$  tal que  $d/d\lambda + d/d(-\lambda) = 0$ .
5.  $a(d/d\lambda + d/d\tau) = ad/d\lambda + ad/d\tau$ .
6.  $(a + b)d/d\lambda = ad/d\lambda + bd/d\lambda$ .
7.  $(ab)d/d\lambda = a(bd/d\lambda)$ .
8.  $1(d/d\lambda) = d/d\lambda$ .

Aquí  $a$  y  $b$  son dos números reales cualesquiera.

Una clase particular de derivada direccional ocurre para aquellas curvas en que sólo una de las funciones coordenadas es variable, y todas las demás se mantienen constantes. En este caso podemos utilizar esta única coordenada variable como parámetro de la curva, y escribir el operador de derivada direccional como

---

<sup>2</sup>Estos operadores de derivación actúan sobre funciones  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  definidas en la variedad  $M$ .

$\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$ . Este operador no es más que la usual derivada parcial del cálculo en varias variables. Para una curva genérica  $x^\mu = x^\mu(\lambda)$ , la regla de la cadena nos permite escribir

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\mu. \quad (2.1)$$

Esto significa que el conjunto de las derivadas parciales  $\{\partial_\mu\}$  en un punto  $P$  de la variedad constituye una *base* para el espacio vectorial formado por todas las derivadas direccionales en ese punto. Si  $d/d\lambda$  es un vector cualquiera en este espacio, la ec. (2.1) nos dice que sus *componentes* en la **base coordinada**  $\{\partial_\mu\}$  son  $dx^\mu/d\lambda$ . Adicionalmente, vemos que la dimensión de este espacio vectorial, llamado el **espacio tangente** en el punto  $P$ , es igual a la dimensión de la variedad  $M$ .

Un vector es un objeto geométrico independiente de las coordenadas; sin embargo, los vectores de la base coordinada  $\{\partial_\mu\}$  han sido *inducidos* por el sistema coordinado que hemos escogido. Por lo tanto, si cambiamos de  $\{x^\mu\}$  a un sistema coordinado  $\{x'^\mu\}$ , deberemos llamar base coordinada a las derivadas  $\partial'_\mu \equiv \partial/\partial x'^\mu$ . Un vector  $A$  puede ser escrito de este modo en cualquiera de estas bases como

$$A = A^\mu \partial_\mu = A'^\mu \partial'_\mu, \quad (2.2)$$

en donde  $A^\mu$  y  $A'^\mu$  son sus componentes en las bases  $\{\partial_\mu\}$  y  $\{\partial'_\mu\}$ , respectivamente<sup>3</sup>. La conexión entre ambas bases proviene de la regla de la cadena del cálculo en varias variables<sup>4</sup>:

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}. \quad (2.3)$$

Las matrices  $(\partial x'^\mu/\partial x^\nu)$  forman una *representación* del **grupo de transformaciones generales de coordenadas**. Usando (2.3) en (2.2) encontramos que las componentes  $A'^\mu$  y  $A^\mu$  están relacionadas mediante

$$A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu. \quad (2.4)$$

Vemos así que, mientras las componentes del vector transforman de acuerdo a la matriz  $(\partial x'^\mu/\partial x^\nu)$ , los vectores de la base transforman con la matriz inversa  $(\partial x^\nu/\partial x'^\mu)$ , de modo de asegurar la *invariancia* del vector  $A$ .

---

<sup>3</sup>Notemos que usamos superíndices para las *componentes* de un vector, en oposición a lo que ocurría con las bases. La convención de sumar sobre índices repetidos se aplica sólo para índices en posiciones opuestas, como aquí.

<sup>4</sup>A menos que se indique explícitamente lo contrario, todas las derivadas deben ser calculadas en el punto  $P$  en cuestión.

### 2.3. Tensores y Formas Diferenciales

Una vez que tenemos un espacio vectorial, siempre es posible construir *otro* espacio vectorial, llamado el **Espacio Vectorial Dual**. Si denotamos por  $T_P$  al espacio tangente (consistente de todos los vectores tangentes en el punto  $P$ ), entonces su dual será denotado por  $T_P^*$  y llamado **Espacio Cotangente**. El espacio dual es el espacio de todos los *mapeos lineales* desde el espacio vectorial original a los números reales; esto es, si  $\omega \in T_P^*$  es un vector dual, su acción sobre la combinación lineal de dos vectores  $V$  y  $W$  satisface

$$\omega(aV + bW) = a\omega(V) + b\omega(W), \quad (2.5)$$

en donde  $a$  y  $b$  son dos números reales cualesquiera. Esta es la propiedad de linealidad del mapeo  $\omega$ . Dos mapeos lineales  $\omega$  y  $\eta$  pueden sumarse y multiplicarse por escalares en forma lineal; así,  $a\omega + b\eta$  es también un mapeo lineal desde el espacio vectorial original a los números reales en el sentido que

$$(a\omega + b\eta)(V) = a\omega(V) + b\eta(V). \quad (2.6)$$

Esta propiedad hace que estos mapeos satisfagan por sí mismos los axiomas de un espacio vectorial. De este modo, el espacio cotangente es el conjunto de todos los mapeos lineales  $\omega$  de la forma

$$\omega : T_P \rightarrow \mathbb{R}, \text{ con } \omega(aV + bW) = a\omega(V) + b\omega(W). \quad (2.7)$$

Los vectores duales del espacio cotangente son también llamados **1-formas**; la razón para esta terminología será comprendida un poco más adelante. El primer ejemplo de una 1-forma es el gradiente de una función  $f$ , denotado por  $df$ . Este se define a partir de su acción sobre un vector tangente  $d/d\lambda$  en la forma

$$df \left( \frac{d}{d\lambda} \right) = \frac{df}{d\lambda}. \quad (2.8)$$

En palabras, cuando la 1-forma  $df$  actúa sobre el vector tangente  $d/d\lambda$  el resultado es un número real que corresponde a la derivada direccional de  $f$  en la dirección dada por  $d/d\lambda$ . Así como pudimos encontrar una base natural (la base coordenada) para el espacio tangente, también es posible encontrar una base igualmente natural para el espacio de 1-formas. Las funciones de punto más simples en las que podemos pensar son aquellas que nos entregan el valor de las coordenadas del punto  $P$ ; es decir, las funciones coordenadas mismas. Los *gradientes* de estas funciones coordenadas sirven

como una base para el espacio de las 1-formas en  $P$ ; esto es, si  $\omega$  es una 1-forma, entonces podemos escribir

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu. \quad (2.9)$$

Más aún, la base  $\{dx^\mu\}$  es *dual* a la base coordenada  $\{\partial_\mu\}$  en el sentido que la acción de la 1-forma  $dx^\mu$  sobre el vector  $\partial_\nu$  está dada por

$$dx^\mu \left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu. \quad (2.10)$$

La regla para la transformación de los elementos de la base  $\{dx^\mu\}$  bajo el grupo de transformaciones generales de coordenadas es obtenida a partir de la expresión para el diferencial de una función, en este caso  $x'^\mu = x'^\mu(x)$ :

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu. \quad (2.11)$$

En perfecta analogía con el caso vectorial, las componentes  $\omega_\mu$  de una 1-forma  $\omega$  transforman con la matriz inversa,

$$\omega'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \omega_\nu, \quad (2.12)$$

de modo de garantizar la *invariancia* de la 1-forma  $\omega = \omega_\mu dx^\mu$  bajo transformaciones generales de coordenadas.

Una generalización inmediata de las ideas de vector tangente y 1-forma es la noción de un **tensor**. Del mismo modo en que una 1-forma es un mapeo lineal desde  $T_P$  a los números reales, un tensor de tipo  $(m, n)$  es un mapeo multilinear de la forma

$$T : \underbrace{T_P^* \times \cdots \times T_P^*}_m \times \underbrace{T_P \times \cdots \times T_P}_n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.13)$$

donde  $\times$  denota producto cartesiano, de modo que, por ejemplo,  $T_P \times T_P$  es el espacio de pares ordenados de vectores. La multilinealidad significa que el tensor actúa linealmente sobre cada uno de sus argumentos. Por ejemplo, para un tensor de tipo  $(1, 1)$  tenemos

$$T(a\omega + b\eta, cV + dW) = acT(\omega, V) + adT(\omega, W) + bcT(\eta, V) + bdT(\eta, W), \quad (2.14)$$

donde  $\omega$  y  $\eta$  son dos 1-formas,  $V$  y  $W$  dos vectores y  $a, b, c$  y  $d$  son cuatro números reales cualesquiera. En este contexto, un escalar es un tensor de tipo  $(0, 0)$ , un vector es un tensor de tipo  $(1, 0)$  y una 1-forma es un tensor de tipo  $(0, 1)$ .

El espacio de todos los tensores de tipo  $(m, n)$  definidos en un punto  $P$  de la variedad forma un espacio vectorial. Para construir una base para este espacio, necesitamos definir el producto tensorial entre dos tensores, denotado con  $\otimes$ . Si  $S$  es un tensor de tipo  $(k, \ell)$  y  $T$  es un tensor de tipo  $(m, n)$ , entonces el **producto tensorial**  $S \otimes T$  es un tensor de tipo  $(k + m, \ell + n)$  determinado por su acción sobre un conjunto de  $(k + m)$  1-formas y  $(\ell + n)$  vectores en la forma

$$\begin{aligned} (S \otimes T)(\omega_1, \dots, \omega_k, \omega_{k+1}, \dots, \omega_{k+m}, V_1, \dots, V_\ell, V_{\ell+1}, \dots, V_{\ell+n}) \\ = S(\omega_1, \dots, \omega_k, V_1, \dots, V_\ell) T(\omega_{k+1}, \dots, \omega_{k+m}, V_{\ell+1}, \dots, V_{\ell+n}). \end{aligned} \quad (2.15)$$

De acuerdo con esta definición, cada tensor actúa sobre sus propios argumentos y los resultados se multiplican (son dos números reales). Notemos también que, en general,  $S \otimes T \neq T \otimes S$ .

Equipados con ambas bases coordenadas  $\{dx^\mu\}$  y  $\{\partial_\mu\}$ , más el producto tensorial que hemos definido, podemos escribir un tensor de tipo  $(m, n)$  como una combinación lineal del producto directo de estas bases en la forma

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n} dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_n} \otimes \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_m}. \quad (2.16)$$

Las componentes de este tensor transforman tal como la ubicación de los índices nos permite predecir:

$$T^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n} = \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu_m}}{\partial x^{\rho_m}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_n}}{\partial x^{\nu_n}} T^{\rho_1 \dots \rho_m}_{\sigma_1 \dots \sigma_n}. \quad (2.17)$$

## 2.4. Breve Introducción a las Formas Diferenciales

El **producto exterior** de dos 1-formas  $\omega$  y  $\eta$  se define como

$$\omega \wedge \eta \equiv \omega \otimes \eta - \eta \otimes \omega, \quad (2.18)$$

y es llamado una **2-forma**. Si  $\omega = \omega_\mu dx^\mu$  y  $\eta = \eta_\nu dx^\nu$ , entonces

$$\omega \wedge \eta = \omega_\mu \eta_\nu (dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu) = \frac{1}{2} (\omega_\mu \eta_\nu - \omega_\nu \eta_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (2.19)$$

Este pequeño cálculo nos muestra que los productos exteriores  $\{dx^\mu \wedge dx^\nu, \text{ con } \mu < \nu\}$  forman una base para el espacio vectorial de las 2-formas en el punto  $P$ . En general, una  **$p$ -forma** o forma diferencial de grado  $p$  se escribe como

$$\alpha = \frac{1}{p!} \alpha_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}, \quad (2.20)$$

donde el producto exterior de  $p$  1-formas está definido como el producto tensorial totalmente antisimetrizado

$$dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \equiv \delta_{\nu_1 \dots \nu_p}^{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_p}. \quad (2.21)$$

Aquí  $\delta_{\nu_1 \dots \nu_p}^{\mu_1 \dots \mu_p}$  es la delta de Kronecker generalizada (ver Apéndice B). Resulta claro que, sin pérdida de generalidad, podemos considerar los coeficientes  $\alpha_{\mu_1 \dots \mu_p}$  en (2.20) como *totalmente antisimétricos*; esto es,  $\alpha_{\mu_1 \dots \mu_p} = \alpha_{[\mu_1 \dots \mu_p]}$ . El espacio de todas las  $p$ -formas en un punto  $P$  de una variedad constituye un espacio vectorial, denotado por  $\Lambda^p$ . Si la dimensión de la variedad es  $n$ , entonces la dimensión de  $\Lambda^p$  es

$$\dim(\Lambda^p) = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}. \quad (2.22)$$

No existen  $p$ -formas para  $p > n$ ; debido a la antisimetría, todas sus componentes serían cero.

El producto exterior para formas diferenciales de grado arbitrario es obtenido en forma asociativa a partir del producto para 1-formas. Si  $P$  es una  $p$ -forma y  $Q$  es una  $q$ -forma, entonces su producto satisface

$$P \wedge Q = (-1)^{pq} Q \wedge P, \quad (2.23)$$

de modo que el producto exterior de dos formas de grado impar es antisimétrico, mientras que todos los demás productos exteriores son simétricos.

La *derivada* de una  $p$ -forma  $\alpha$  es una  $(p+1)$ -forma, denotada por  $d\alpha$ , con componentes

$$d\alpha \equiv \frac{1}{p!} \frac{\partial \alpha_{\mu_1 \dots \mu_p}}{\partial x^\nu} dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}. \quad (2.24)$$

Esta derivada, llamada **derivada exterior**, satisface una regla de Leibniz apropiadamente corregida con un signo para el caso de formas de grado impar. Si  $P$  es una  $p$ -forma y  $Q$  es una  $q$ -forma, entonces la derivada exterior de su producto satisface

$$d(P \wedge Q) = dP \wedge Q + (-1)^p P \wedge dQ. \quad (2.25)$$

La importancia de la derivada exterior radica en el hecho que es también un objeto geométrico independiente de las coordenadas, al igual que la  $p$ -forma  $\alpha$ . Esto significa que las componentes de la  $(p+1)$ -forma  $d\alpha$  transforman covariantemente bajo el grupo de transformaciones generales de coordenadas.

Una propiedad crucial de la derivada exterior es que, para cualquier forma diferencial  $\alpha$ ,

$$d(d\alpha) = 0, \quad (2.26)$$

lo cual es a menudo escrito simbólicamente como  $d^2 = 0$ . Esta identidad es una consecuencia de la definición de la derivada exterior, más el hecho que las derivadas parciales siempre conmutan,  $\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu \equiv 0$ .

A modo de ejemplo, analicemos los campos de formas diferenciales existentes en el espacio euclideo tridimensional. Como hemos visto, en tres dimensiones sólo existen 0, 1, 2 y 3-formas. Estas pueden escribirse como

$$(i) \quad \omega_0 = f(x, y, z),$$

$$(ii) \quad \omega_1 = \omega_x(x, y, z) dx + \omega_y(x, y, z) dy + \omega_z(x, y, z) dz,$$

$$(iii) \quad \omega_2 = \omega_{xy}(x, y, z) dx \wedge dy + \omega_{yz}(x, y, z) dy \wedge dz + \omega_{zx}(x, y, z) dz \wedge dx,$$

$$(iv) \quad \omega_3 = \omega_{xyz}(x, y, z) dx \wedge dy \wedge dz.$$

La acción del operador de derivación exterior  $d$  sobre cada una de estas formas diferenciales produce

$$(i) \quad d\omega_0 = (\partial f / \partial x) dx + (\partial f / \partial y) dy + (\partial f / \partial z) dz,$$

$$(ii) \quad d\omega_1 = (\partial \omega_y / \partial x - \partial \omega_x / \partial y) dx \wedge dy + (\partial \omega_z / \partial y - \partial \omega_y / \partial z) dy \wedge dz + (\partial \omega_x / \partial z - \partial \omega_z / \partial x) dz \wedge dx,$$

$$(iii) \quad d\omega_2 = (\partial \omega_{yz} / \partial x + \partial \omega_{zx} / \partial y + \partial \omega_{xy} / \partial z) dx \wedge dy \wedge dz,$$

$$(iv) \quad d\omega_3 = 0.$$

Identificamos aquí la acción de  $d$  sobre  $\omega_0$  con el *gradiente*, sobre  $\omega_1$  con el *rotacional*, y sobre  $\omega_2$  con la *divergencia*. Vemos así que el formalismo de las formas diferenciales y la derivación exterior reproducen de manera natural los operadores diferenciales usuales del cálculo vectorial en  $\mathbb{R}^3$ .

## 2.5. La derivada de Lie

Sea  $\Psi(x)$  un campo tensorial de grado arbitrario (suprimimos temporalmente los índices). Bajo una transformación infinitesimal de coordenadas  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$ , la función  $\Psi(x)$  cambiará en general a [23]

$$\Psi'(x') = \Psi(x) + \delta\Psi(x) + \xi^\mu \partial_\mu \Psi(x), \quad (2.27)$$

donde

$$\delta\Psi(x) \equiv \Psi'(x) - \Psi(x) \quad (2.28)$$

es el **cambio funcional** de  $\Psi$ . En esta sección estaremos interesados en escribir una fórmula general para el cambio funcional de una forma diferencial de grado arbitrario.

Una función escalar  $\phi$  (forma diferencial de grado 0) es definida a partir del requerimiento

$$\phi'(x') = \phi(x). \quad (2.29)$$

De (2.27) vemos que esta definición es equivalente a decir que el cambio funcional en  $\phi$  bajo  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$  puede escribirse en la forma

$$\delta\phi(x) = -\xi^\mu \partial_\mu \phi(x). \quad (2.30)$$

Una 1-forma  $A = A_\mu dx^\mu$  puede también ser definida a partir de la ley de transformación de sus componentes, ec. (2.12). Para una transformación infinitesimal  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$ , esta ecuación toma la forma

$$A'_\mu(x') = A_\mu(x) - A_\lambda(x) \partial_\mu \xi^\lambda(x). \quad (2.31)$$

Comparando con (2.27), vemos que el cambio funcional inducido en  $A_\mu(x)$  por esta transformación es

$$\delta A_\mu = -\xi^\lambda \partial_\lambda A_\mu - A_\lambda \partial_\mu \xi^\lambda. \quad (2.32)$$

La ec. (2.32) puede ser reescrita (usando la regla de Leibniz) como

$$\delta A_\mu = -\partial_\mu (\xi^\lambda A_\lambda) - \xi^\lambda (\partial_\lambda A_\mu - \partial_\mu A_\lambda). \quad (2.33)$$

Esta ecuación marcará la pauta de la forma general de  $\delta\alpha$  para una  $p$ -forma  $\alpha$ . Notemos que ella involucra la derivada exterior del producto  $\xi^\lambda A_\lambda$ , así como la contracción de  $\xi^\lambda$  con la 2-forma  $dA = \frac{1}{2} (\partial_\lambda A_\mu - \partial_\mu A_\lambda) dx^\lambda \wedge dx^\mu$ .

Definimos el **operador de contracción**<sup>5</sup>  $I_\xi$  a partir de su acción sobre una  $p$ -forma  $\alpha$

$$\alpha = \frac{1}{p!} \alpha_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \quad (2.34)$$

por

$$I_\xi \alpha \equiv \frac{1}{(p-1)!} \xi^{\mu_1} \alpha_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}. \quad (2.35)$$

---

<sup>5</sup>También conocido como **producto interior** y denotado por  $\xi \lrcorner$ .

Notemos que  $I_\xi$  disminuye en una unidad el grado de una forma diferencial. Este operador de contracción satisface la regla de Leibniz: si  $P$  es una  $p$ -forma y  $Q$  es una  $q$ -forma, entonces

$$I_\xi(P \wedge Q) = I_\xi P \wedge Q + (-1)^p P \wedge I_\xi Q. \quad (2.36)$$

Al igual que la derivada exterior, el operador de contracción es nilpotente:  $I_\xi I_\xi = 0$ .

La **derivada de Lie**  $\mathcal{L}$  a lo largo de un campo vectorial  $\xi$  de una forma diferencial de grado arbitrario es definida como el *anticonmutador* de la derivada exterior y el operador de contracción:

$$\mathcal{L}_\xi \equiv dI_\xi + I_\xi d. \quad (2.37)$$

Esta derivada no cambia el grado de una forma diferencial, y satisface (como toda buena derivada) la regla de Leibniz:

$$\mathcal{L}_\xi(P \wedge Q) = \mathcal{L}_\xi P \wedge Q + P \wedge \mathcal{L}_\xi Q. \quad (2.38)$$

Su definición permite escribir el cambio funcional en una  $p$ -forma  $\alpha$  bajo la transformación infinitesimal  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$  simplemente como

$$\delta\alpha = -\mathcal{L}_\xi\alpha. \quad (2.39)$$

Esta expresión ha sido verificada para una 1-forma  $A = A_\mu dx^\mu$  y para un campo escalar (0-forma)  $\phi$  (en este caso,  $I_\xi\phi = 0$ ); del mismo modo es posible comprobar su validez para formas diferenciales de rango arbitrario.

# Capítulo 3

## Relatividad General

*“There’s a rumor that only three people in the entire world understand Einstein’s theory”, he said, “and you must be one of them.” Eddington looked at him in silence for several seconds. “Don’t be modest, Eddington”, the man said. Eddington shrugged. “Not at all”, said Eddington, “I was wondering who the third might be.”*

### 3.1. Relatividad General en el formalismo de Einstein

La **Teoría General de la Relatividad** explica los fenómenos gravitacionales como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo. En su formulación original, dada por Einstein en 1915, ella hace uso del aparato matemático de la geometría de Riemann. En esta geometría, el objeto principal es el tensor métrico, del cual todas las propiedades geométricas del espacio son deducibles.

El principio físico clave tras la Teoría General de la Relatividad es el *Principio de Equivalencia*. Para enunciar este principio necesitamos primero definir qué entendemos por un *marco de referencia lorentziano*. Este no es más que la generalización relativista del marco de referencia inercial newtoniano. Así, un **marco de referencia lorentziano** [19] es aquel en el que la velocidad de la luz toma su valor estándar, y los rayos de luz, al igual que las líneas de mundo de las partículas de prueba, son rectos. El **Principio de Equivalencia** afirma que, *en cada punto del espacio-tiempo, es siempre posible introducir un marco de referencia lorentziano local tal que en él las leyes de la física toman la misma forma que en Relatividad Especial*. Fue este principio el que motivó a Einstein a utilizar una *variedad diferen-*

*ciable* como arena. Una **variedad diferenciable** es, en pocas palabras, un espacio topológico que es localmente homeomórfico a  $\mathbb{R}^n$ . La similitud entre ambas concepciones es clara; la variedad diferenciable del espacio-tiempo puede ser muy compleja, pero localmente es mapeable al espacio-tiempo plano de Minkowski. El homeomorfismo local nos permite introducir coordenadas en una vecindad de un punto; éstas no son más que un mapeo entre una vecindad abierta de la variedad y una vecindad abierta de  $\mathbb{R}^n$ . Es claro que este mapeo es en gran medida arbitrario, salvo por los requerimientos de continuidad y diferenciabilidad; luego, existen infinitas maneras posibles de introducir coordenadas en una vecindad de un punto de la variedad. Por supuesto, ninguna cantidad físicamente relevante puede enterarse de algún cambio realizado en las coordenadas de la vecindad. Esto significa que *todas las cantidades con sentido físico deben ser invariantes bajo el grupo de transformaciones generales de coordenadas*. Por lo tanto, nuestra descripción de la variedad debe usar objetos geométricos como vectores, tensores y formas diferenciales, los cuales son independientes de las coordenadas escogidas.

En la geometría de Riemann, las propiedades métricas del espacio están contenidas en el **tensor métrico**<sup>1</sup>  $g_{\mu\nu}$ : éste provee de un medio para calcular el **producto punto** entre dos vectores  $A$  y  $B$ , denotado por  $A \cdot B$ . Las componentes coordenadas de este tensor corresponden al producto punto entre los vectores de la base coordenada:

$$g_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \cdot \partial_\nu. \quad (3.1)$$

Su conocimiento permite el cálculo del producto punto entre dos vectores cualesquiera a través de  $A \cdot B = A^\mu B^\nu (\partial_\mu \cdot \partial_\nu) = A^\mu B^\nu g_{\mu\nu}$ . Un producto punto induce naturalmente una **norma** en el espacio, lo cual justifica el nombre de “métrica” dado a este tensor.

Las propiedades métricas del espacio nos hablan acerca de longitudes, áreas, volúmenes, etc. En cambio, propiedades invariantes de escala tales como formas y ángulos corresponden a la estructura *afín* del espacio [32]. Estas se hallan contenidas en la **conexión afín**  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ , la cual nos permite trasladar un vector paralelamente a lo largo de una curva. Esta *traslación paralela*, a su vez, nos permite definir una derivada covariante  $D_\mu$  en la variedad. Para tener una derivada necesitamos un modo para *comparar* vectores en puntos cercanos de la variedad. Sin embargo, esto no puede ser hecho directamente, dado que vectores en puntos distintos pertenecen a espacios tangentes distintos. Esto puede ser visto más claramente notando que

---

<sup>1</sup>Estrictamente hablando,  $g_{\mu\nu}$  son las *componentes* del tensor métrico  $g$  en la base coordenada  $\{\partial_\mu\}$ . Sin embargo, seguiremos refiriéndonos, en forma un tanto inexacta, a  $g_{\mu\nu}$  como el tensor métrico para evitar confusiones con  $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$ .

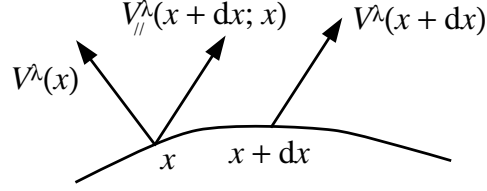


Figura 3.1: Representación Esquemática del Transporte Paralelo.

la matriz  $(\partial x'^{\mu}/\partial x^{\nu})$ , que mide el cambio en las componentes de un vector bajo una transformación general de coordenadas, es una función de punto. Así, dos vectores  $V^{\mu}(x)$  y  $V^{\mu}(x + dx)$  transforman con matrices *distintas*, y su contracción no forma un escalar (en el sentido de que no es invariante bajo transformaciones generales de coordenadas). La conexión afín nos permite trasladar paralelamente el vector  $V^{\mu}(x + dx)$  en  $x + dx$  hasta  $x$ , donde es posible compararlo con  $V^{\mu}(x)$ . Esta traslación es prescrita según la ley

$$V_{\parallel}^{\lambda}(x + dx; x) = V^{\lambda}(x + dx) + dx^{\mu}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}V^{\nu}(x). \quad (3.2)$$

Así, el vector trasladado paralelamente desde  $x + dx$  hasta  $x$ , que denotamos por  $V_{\parallel}^{\lambda}(x + dx; x)$ , es obtenido a partir de la acción de la “matriz”  $dx^{\mu}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$  sobre el vector en  $x$ ,  $V^{\nu}(x)$ . Es importante notar que la conexión afín *define* la noción de transporte paralelo en una variedad; dos conexiones afines distintas definirán, en general, nociones de transporte paralelo distintas.

La **derivada covariante** de  $V^{\lambda}$  con respecto a la conexión  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ , denotada por  $D_{\mu}V^{\lambda}$ , queda definida a través de la ecuación

$$\begin{aligned} dx^{\mu}D_{\mu}V^{\lambda} &= V_{\parallel}^{\lambda}(x + dx; x) - V^{\lambda}(x), \\ &= V^{\lambda}(x + dx) + dx^{\mu}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}V^{\nu}(x) - V^{\lambda}(x), \\ &= dx^{\mu}[\partial_{\mu}V^{\lambda}(x) + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}V^{\nu}(x)], \end{aligned}$$

esto es,

$$D_{\mu}V^{\lambda} \equiv \partial_{\mu}V^{\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}V^{\nu}. \quad (3.3)$$

Para que esta derivada transforme tensorialmente bajo el grupo de transformaciones generales de coordenadas, es necesario exigir que la conexión afín  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$  cambie de acuerdo a

$$\Gamma'_{\mu\nu}{}^{\lambda} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma^{\gamma}{}_{\rho\sigma} - \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\sigma}}. \quad (3.4)$$

Como vemos, las componentes de la conexión afín transforman de modo *no tensorial* (o inhomogéneo) bajo el grupo de transformaciones generales de coordenadas; su ley de transformación es tal, no obstante, que asegura que la combinación (3.3) transforme covariantemente.

En general, una variedad admite un gran número de conexiones que satisfagan (3.4). En la geometría de Riemann, sin embargo, y por lo tanto también en Relatividad General, una de entre todas estas es singularizada a partir de los requerimientos

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}, \quad (3.5)$$

$$D_{\mu}g_{\rho\sigma} = 0. \quad (3.6)$$

La primera de estas ecuaciones expresa la anulación del **tensor de torsión**

$$T_{\mu\nu}^{\lambda} \equiv \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}. \quad (3.7)$$

Notemos que (i) si  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$  transforma como conexión, lo mismo es válido para  $\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}$ , y que (ii) la diferencia entre dos conexiones transforma como un tensor de tipo (1, 2). Luego, (3.7) define a un honesto tensor (1, 2). El segundo requerimiento es conocido como *compatibilidad métrica*, y expresa la preservación del producto interno entre dos vectores bajo transporte paralelo. Esto quiere decir que la magnitud de un vector es preservada al ser transportado paralelamente, así como también el ángulo entre dos vectores. La conexión que cumple con estos requerimientos es conocida como **conexión de Christoffel**, y puede ser escrita en términos del tensor métrico y sus derivadas en la forma

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma} (\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}). \quad (3.8)$$

En general, la conexión es el objeto matemático que nos permite cuantificar la curvatura de una variedad. Una de las manifestaciones de la curvatura viene dada por la *no conmutatividad* de las derivadas covariantes  $D_{\mu}$ . La medida de la falta de conmutatividad de dos derivadas covariantes  $D_{\mu}$  y  $D_{\nu}$  es dada por su *conmutador*  $[D_{\mu}, D_{\nu}] \equiv D_{\mu}D_{\nu} - D_{\nu}D_{\mu}$ . Usando la definición (3.3) podemos calcular la acción del conmutador de dos derivadas covariantes sobre un vector  $V^{\rho}$ . Esta resulta ser

$$[D_{\mu}, D_{\nu}]V^{\rho} = R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}V^{\sigma} - T^{\lambda}_{\mu\nu}D_{\lambda}V^{\rho}, \quad (3.9)$$

donde  $T^{\lambda}_{\mu\nu}$  es el tensor de torsión (el cual se anula para la conexión de Christoffel), y  $R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}$  es conocido como el **tensor de curvatura de Riemann**:

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} \equiv \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}. \quad (3.10)$$

El tensor de Riemann mide la parte del conmutador entre dos derivadas covariantes que es proporcional al campo vectorial mismo, mientras que el tensor de torsión mide aquella parte que es proporcional a la derivada covariante del campo vectorial; la segunda derivada no aparece en ningún lado. Notemos que no necesitamos de la métrica para definir el tensor de Riemann; éste es función exclusivamente de la conexión y sus derivadas parciales (las derivadas covariantes de la conexión no están definidas: ella no es un tensor!).

El tensor de Riemann contiene toda la información acerca de la curvatura de la variedad. Información más resumida puede encontrarse en sus contracciones; esencialmente la única que puede ser hecha<sup>2</sup> es

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\rho}_{\mu\rho\nu}, \quad (3.11)$$

ecuación que define al **tensor de Ricci**. La traza del tensor de Ricci entrega una medida escalar de la curvatura, y es conocida como **curvatura escalar de Ricci**:

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (3.12)$$

Notemos que una variedad puede ser curva y no obstante el tensor de Ricci ser nulo; en cambio, si alguna componente del tensor de Riemann es distinta de cero, esto indica inequívocamente la presencia de curvatura.

A modo de ejemplo, consideremos una esfera de radio  $a$ , la cual parametrizamos con los ángulos  $\theta$  y  $\varphi$  de las coordenadas esféricas. La métrica en este espacio es

$$ds^2 = a^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.13)$$

Las únicas componentes no nulas de la conexión de Christoffel son

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^{\theta} = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{\theta\varphi}^{\varphi} = \Gamma_{\varphi\theta}^{\varphi} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta},$$

en tanto que una componente representativa del tensor de Riemann (todas las demás pueden obtenerse a partir de ella por simetrías) es

$$R^{\theta}_{\varphi\theta\varphi} = \sin^2 \theta.$$

---

<sup>2</sup>La unicidad del tensor de Ricci proviene de las simetrías del tensor de curvatura de Riemann. De su definición como conmutador de dos derivadas covariantes, es evidente que  $R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = -R^{\rho}_{\sigma\nu\mu}$ . Cuando la conexión de Christoffel es utilizada, tenemos las simetrías adicionales  $R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu}$ ,  $R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}$ , y  $R_{\rho[\sigma\mu\nu]} = 0$ . Esto significa que el tensor de Riemann “métrico” (es decir, aquel derivado de la conexión de Christoffel) puede ser visualizado como una matriz simétrica  $R_{[\rho\sigma][\mu\nu]}$ , donde los pares antisimétricos  $\rho\sigma$  y  $\mu\nu$  son considerados como índices individuales. Por lo tanto, la única contracción posible es entre el primer y el segundo par de índices, estando todas las demás relacionadas con ella por un signo.

Esta componente no nula es un reflejo de la curvatura de la esfera. La curvatura escalar de Ricci es  $R = 2/a^2$ . Su signo corresponde a nuestra concepción intuitiva de que una esfera tiene curvatura “positiva”. Notemos también que, a medida que  $a \rightarrow \infty$ , la curvatura escalar de Ricci se hace cada vez más pequeña. Esto también se corresponde con nuestra noción intuitiva de que una esfera de radio muy grande se ve localmente casi plana: nuestro propio planeta es el mejor ejemplo!

De acuerdo a Einstein, la distribución de materia y energía en el universo determinan la geometría de éste. Citando a Misner, Thorne y Wheeler [19], podemos decir que “*el espacio actúa sobre la materia, diciéndole como moverse. A su vez, la materia reacciona sobre el espacio, diciéndole como curvarse.*” Es decir que la teoría de la gravitación de Einstein es una teoría de la dinámica de la geometría, o *geometrodinámica*.

Las ecuaciones de campo de Einstein nos proveen del vínculo cuantitativo entre materia y geometría. Ellas pueden ser obtenidas a partir de un principio variacional, aunque no fue éste el método usado por Einstein mismo para deducirlas. En noviembre de 1915, y en forma casi simultánea con el artículo definitivo de Einstein, el matemático alemán David Hilbert propuso un funcional de acción que permite deducir las ecuaciones de campo. Esta es la **acción de Einstein-Hilbert**

$$S_{\text{EH}}^{(4)} = \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (3.14)$$

donde  $g \equiv \det(g_{\mu\nu}) < 0$  es el determinante del tensor métrico. Si adoptamos el punto de vista de Einstein, entonces la métrica es el único campo fundamental y esta acción resulta ser un funcional de la métrica y sus derivadas. Además, el lagrangeano  $L_{\text{EH}}^{(4)} = R$  es un escalar, de modo que la acción es invariante bajo transformaciones generales de coordenadas. De todos los escalares de curvatura (ejemplos:  $R$ ,  $R^\mu_\nu R^\nu_\mu$ ,  $R^{\rho\sigma} R^{\mu\nu}_{\rho\sigma}$ , etc.) que pueden formarse en cuatro dimensiones, Hilbert escogió la curvatura escalar de Ricci  $R$ , dado que es el único que provee de ecuaciones de segundo orden para la métrica. El requerimiento de que esta acción sea estacionaria frente a pequeñas variaciones  $\delta g_{\mu\nu}$  en la métrica nos conduce a las **ecuaciones de campo de Einstein** (en el vacío)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0. \quad (3.15)$$

Hasta aquí hemos seguido la ruta de la Teoría General de la Relatividad, la cual está formulada, como hemos visto, usando tensores escritos en bases coordenadas y la conexión de Christoffel. En el camino fue necesario poner el tensor de torsión idénticamente igual a cero, lo cual fue hecho sin más justificación que la de poder obtener una conexión afín en términos de la métrica. Esto equivale a reducir las

características afines de un espacio a propiedades puramente métricas. *En general, paralelismo y metricidad pueden ser considerados como nociones independientes.* No necesitamos *medir* ángulos ni distancias para definir el transporte paralelo [32]. Así, resulta interesante buscar una formulación de la Teoría General de la Relatividad en donde esta independencia sea tomada en cuenta. Este formalismo existe, y es conocido como *método de Palatini*, en la formulación tensorial, o *formalismo de primer orden*, cuando trabajamos con formas diferenciales. En las secciones siguientes nos aproximamos a este enfoque, el cual nos permite escribir no sólo Relatividad General sino que toda una nueva clase de teorías que comparten sus mismos fundamentos geométricos.

### 3.2. El Vielbein y el grupo de Lorentz

La base coordenada para el espacio tangente en un punto  $P$  está disponible tan pronto como tenemos un sistema coordenado local en este punto, de modo que resulta muy natural recurrir a ella. Sin embargo, esta base no es, en general, ortogonal; más bien [cf. ec. (3.1)],

$$\partial_\mu \cdot \partial_\nu = g_{\mu\nu}, \quad (3.16)$$

donde  $g_{\mu\nu}$  son las componentes del tensor métrico en la base coordenada en el punto  $P$ . Por otro lado, siempre es posible encontrar, en cada punto  $P$  de la variedad, una *base ortonormal*  $\{e_a\}$  que cumpla con

$$e_a \cdot e_b = e_a^\rho e_b^\sigma g_{\rho\sigma} = \eta_{ab}, \quad (3.17)$$

donde  $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$  es la métrica del espacio-tiempo plano de Minkowski. Es importante notar que esta base ortonormal es local; esto es, sus componentes  $e_a^\mu$  sobre la base coordenada son funciones de punto. Estas componentes forman la *matriz de cambio de base* de  $\{\partial_\mu\}$  a  $\{e_a\}$ , en el sentido que  $e_a = e_a^\mu \partial_\mu$ . Para que este cambio de base sea legítimo, debe ser posible escribir los vectores de la base coordenada en términos de los  $e_a$ . Esto significa que debe existir la matriz inversa  $\bar{e}_\mu^a$  tal que  $\partial_\mu = \bar{e}_\mu^a e_a$ , con

$$\bar{e}_\nu^a e_a^\mu = \delta_\nu^\mu, \quad e_b^\mu \bar{e}_\mu^a = \delta_b^a. \quad (3.18)$$

Para ser consistente con (3.17), esta matriz debe satisfacer la relación

$$g_{\mu\nu} = \bar{e}_\mu^a \bar{e}_\nu^b \eta_{ab}. \quad (3.19)$$

Un cálculo directo muestra que esta matriz inversa es simplemente

$$\bar{e}_\mu^a = e_\mu^a \equiv \eta^{ab} e_b^\nu g_{\nu\mu}, \quad (3.20)$$

en el sentido que  $e_\mu^a$  satisface las ecs. (3.18) y (3.19). Así, podemos escribir la ec. (3.19) como

$$e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab} = g_{\mu\nu}. \quad (3.21)$$

Esta ecuación lleva a uno a decir que los  $e_\mu^a$  forman la “raíz cuadrada” del tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ . Como vemos, una vez conocidas las componentes de la matriz  $e_\mu^a$  resulta directo calcular la métrica del espacio-tiempo a través de (3.21). Esto significa que estas componentes contienen toda la información existente en el tensor métrico, y es por lo tanto posible recurrir a ellas para efectuar una descripción alternativa de la gravitación.

En  $d$  dimensiones, la métrica tiene  $d(d+1)/2$  componentes independientes, en tanto que  $e_\mu^a$  tiene  $d^2$ . La diferencia se explica por el hecho que, si bien  $g_{\mu\nu}$  queda unívocamente especificada [a través de (3.21)] una vez que conocemos  $e_\mu^a$ , la afirmación recíproca no es cierta. Es decir que, para un tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  dado, existe toda una clase de equivalencia de  $e_\mu^a$ 's que satisfacen (3.21). En efecto, notemos que si reemplazamos  $e_\mu^a$  por

$$e_\mu^a \rightarrow e'^a_\mu = \Lambda^a_b e_\mu^b \quad (3.22)$$

en (3.21), obtenemos

$$e'^a_\mu e'^b_\nu \eta_{ab} = e^c_\mu e^d_\nu (\Lambda^a_c \Lambda^b_d \eta_{ab}). \quad (3.23)$$

La ec. (3.21) sigue siendo válida para  $e'^a_\mu$  si las matrices  $\Lambda^a_b$  satisfacen la condición

$$\Lambda^a_c \Lambda^b_d \eta_{ab} = \eta_{cd}. \quad (3.24)$$

Así, decimos que la métrica del espacio-tiempo  $g_{\mu\nu}$  es invariante bajo las “rotaciones” (3.22) de la base ortonormal local  $e_\mu^a$  si las matrices de rotación  $\Lambda^a_b$  satisfacen la condición (3.24).

Todas las matrices  $\Lambda$  de componentes  $\Lambda^a_b$  que cumplen con (3.24) forman un *grupo*, llamado el **grupo de Lorentz**. *El grupo de Lorentz es el grupo de rotaciones del espacio de Minkowski*, y sus elementos son llamados **transformaciones de Lorentz**. Para demostrar la propiedad de grupo [11], resulta más conveniente escribir (3.24) en forma matricial, definiendo  $\Lambda^T$  como la matriz con elementos  $(\Lambda^T)^a_b = \Lambda^a_b$ . Así, (3.24) toma la forma

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta, \quad (3.25)$$

donde  $\eta$  es la matriz de elementos  $\eta_{ab}$ . Una transformación de Lorentz es, en este lenguaje, una matriz  $\Lambda$  que cumple con (3.25). Entonces:

1. Si  $\Lambda_1$  y  $\Lambda_2$  son transformaciones de Lorentz, también lo es  $\Lambda_1\Lambda_2$ :

$$(\Lambda_1\Lambda_2)^T \eta (\Lambda_1\Lambda_2) = \Lambda_2^T (\Lambda_1^T \eta \Lambda_1) \Lambda_2 = \Lambda_2^T \eta \Lambda_2 = \eta.$$

2. El producto de transformaciones de Lorentz es asociativo: esto se sigue inmediatamente de la asociatividad del producto matricial.
3. La matriz identidad es una transformación de Lorentz:

$$1^T \eta 1 = \eta.$$

4. Toda transformación de Lorentz  $\Lambda$  tiene una inversa, la cual es también una transformación de Lorentz: tomando determinante a ambos lados de (3.25), vemos que  $\det(\Lambda) = \pm 1 \neq 0$ , de modo que  $\Lambda$  es una matriz invertible. Denotamos su inversa por  $\Lambda^{-1}$  y multiplicamos por  $(\Lambda^{-1})^T$  desde la izquierda y por  $\Lambda^{-1}$  desde la derecha:

$$(\Lambda^{-1})^T \eta \Lambda^{-1} = (\Lambda^{-1})^T (\Lambda^T \eta \Lambda) \Lambda^{-1} = (\Lambda \Lambda^{-1})^T \eta (\Lambda \Lambda^{-1}) = \eta.$$

Estos argumentos concluyen nuestra demostración de la propiedad de grupo de las transformaciones de Lorentz. Notamos finalmente que, en  $d$  dimensiones, es posible realizar  $d(d-1)/2$  rotaciones independientes. Este número corresponde precisamente a la *diferencia* entre el número de componentes del vielbein y de la métrica, dando cuenta de los grados de libertad perdidos.

### 3.3. Torsión y Curvatura

La combinación

$$e^a \equiv e^a_\mu dx^\mu \tag{3.26}$$

recibe el nombre de **1-forma vielbein**, del alemán “muchas piernas”. En cuatro dimensiones es perspicazmente llamado *vierbein*, lo cual corresponde a “cuatro piernas”. Como hemos notado anteriormente, la transformación de Lorentz

$$e^a \rightarrow e'^a = \Lambda^a_b e^b \tag{3.27}$$

deja inalterada la métrica del espacio-tiempo  $g_{\mu\nu} = e^a_\mu e^b_\nu \eta_{ab}$ . Esta ecuación expresa una ley de transformación que corresponde a un vector; por lo tanto, podemos decir que *el vielbein se comporta como un vector bajo transformaciones locales de*

*Lorentz*. Es importante en este punto subrayar el carácter local de las transformaciones; en cada punto del espacio-tiempo es posible realizar la transformación (3.27) independientemente y mantener siempre la misma métrica  $g_{\mu\nu}$ .

¿Qué otros tensores podemos construir a partir del vielbein? Si tomamos su derivada exterior  $de^a$ , ésta transforma bajo transformaciones locales de Lorentz como<sup>3</sup>

$$de^a \rightarrow (de^a)' = d\Lambda_b^a e^b + \Lambda_b^a de^b. \quad (3.28)$$

Aquí  $d\Lambda_b^a = dx^\mu \partial_\mu \Lambda_b^a$  es la derivada exterior de la 0-forma  $\Lambda_b^a$ , la cual es una 1-forma. Vemos de (3.28) que el carácter local de las transformaciones de Lorentz  $\Lambda_b^a$  destruye la tensorialidad de la derivada exterior del vielbein, introduciendo el término no homogéneo  $d\Lambda_b^a e^b$  en la ley de transformación de  $de^a$ . Esto constituye ciertamente un inconveniente, ya que esperamos que la derivada de un objeto cualquiera tenga las mismas propiedades de transformación que el objeto original. Podemos remediar este problema introduciendo una “**derivada covariante exterior**”  $D$ , y *exigiendo* que  $De^a$  transforme covariantemente bajo transformaciones locales de Lorentz; esto es,

$$De^a \rightarrow (De^a)' = \Lambda_b^a De^b. \quad (3.29)$$

Con este requerimiento en mente, definimos

$$De^a \equiv de^a + \omega_b^a e^b, \quad (3.30)$$

donde  $\omega_b^a$  es llamada la **1-forma conexión de spin**, debido a que es también usada para tomar derivadas covariantes de campos spinoriales. Determinaremos cuál debe ser la ley de transformación para  $\omega_b^a$  de modo de cumplir con (3.29). Escribiendo

$$\begin{aligned} (De^a)' &= (de^a)' + \omega_b^a e^b, \\ &= d\Lambda_b^a e^b + \Lambda_b^a de^b + \omega_b^a \Lambda_c^b e^c, \end{aligned}$$

e igualando con (3.29), encontramos

$$d\Lambda_b^a e^b + \Lambda_b^a de^b + \omega_b^a \Lambda_c^b e^c = \Lambda_b^a (de^b + \omega_c^b e^c),$$

o bien,

$$(\omega_b^a \Lambda_c^b - \Lambda_b^a \omega_c^b + d\Lambda_c^a) e^c = 0. \quad (3.31)$$

---

<sup>3</sup>En lo sucesivo, a menudo omitimos el símbolo  $\wedge$  usado para denotar producto exterior entre formas diferenciales. La simple yuxtaposición de dos formas diferenciales debe entenderse de aquí en adelante como un producto exterior.

Como esto debe ser válido para cualquier  $e^a$ , hallamos finalmente

$$\omega'^a_b = \Lambda_b^d \Lambda_c^a \omega_d^c - \Lambda_b^c d\Lambda_c^a, \quad (3.32)$$

donde hemos usado la matriz inversa  $\Lambda_b^a$  para aislar  $\omega'^a_b$ . Esta es la ley de transformación para la conexión. Notamos que el segundo término  $\Lambda_b^c d\Lambda_c^a$  la hace no tensorial; esto no debe sorprendernos, ya que hemos requerido que la combinación  $De^a \equiv de^a + \omega_b^a e^b$  sea tensorial, a pesar de estar construida a partir de elementos no tensoriales. Esta derivada covariante puede ahora ser aplicada a cualquier vector o tensor del espacio tangente, produciendo una forma diferencial de un grado superior con las mismas propiedades tensoriales que el objeto original. Así,  $De^a$  es una 2-forma que transforma como un vector bajo transformaciones locales de Lorentz.

Resulta legítimo preguntarse acerca de derivadas covariantes exteriores de orden superior; a diferencia de lo que ocurría con la derivada exterior  $d$ , la derivada covariante exterior *no* produce un resultado nulo cuando es aplicada en forma sucesiva. Así, tenemos que para el vielbein, por ejemplo,

$$DDe^a = d(De^a) + \omega_c^a De^c = (d\omega_b^a + \omega_c^a \omega_b^c) e^b, \quad (3.33)$$

donde hemos utilizado (3.30) y  $d^2 = 0$ , además de la regla de Leibniz (2.25), la cual sigue siendo válida para derivadas covariantes exteriores. El lado izquierdo de (3.33) es manifiestamente tensorial; por lo tanto, el paréntesis del lado derecho debe transformar como un tensor de tipo (1, 1) bajo transformaciones locales de Lorentz. Notemos que está construido a partir de la 1-forma conexión, la cual es no tensorial; sin embargo, esta combinación particular resulta en un objeto con propiedades de transformación tensoriales. Llamando

$$T^a \equiv De^a, \quad (3.34)$$

$$R_b^a \equiv d\omega_b^a + \omega_c^a \omega_b^c, \quad (3.35)$$

podemos escribir (3.33) en la forma

$$DT^a = R_b^a e^b. \quad (3.36)$$

Nada nos impide continuar tomando derivadas covariantes; usando la regla de Leibniz para  $D$ , vemos que el único tensor nuevo que aparece en  $DDT^a$  es  $DR_b^a$ . Sin embargo,

$$DR_b^a = dR_b^a + \omega_c^a R_b^c - \omega_b^c R_c^a \equiv 0, \quad (3.37)$$

usando (3.35). Luego, no es posible obtener ningún tensor nuevo a partir de las derivadas covariantes superiores del vielbein.

Las 2-formas tensoriales  $T^a$  y  $R_b^a$  definidas en (3.34) y (3.35) reciben los nombres de **Torsión** y **Curvatura**, respectivamente. Como hemos visto, ellas satisfacen las relaciones

$$DT^a = R_b^a e^b, \quad (3.38)$$

$$DR_b^a = 0, \quad (3.39)$$

las cuales son conocidas como *identidades de Bianchi*.

Podemos justificar los nombres dados a  $T^a$  y  $R_b^a$  analizando sus componentes en una base coordenada  $\{\partial_\mu\}$ . Comenzamos notando que

$$T^a = \frac{1}{2} T_{\mu\nu}^a dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad (3.40)$$

$$R_b^a = \frac{1}{2} R_{b\mu\nu}^a dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad (3.41)$$

donde

$$T_{\mu\nu}^a = \partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a + \omega_{b\mu}^a e_\nu^b - \omega_{b\nu}^a e_\mu^b, \quad (3.42)$$

$$R_{b\mu\nu}^a = \partial_\mu \omega_{b\nu}^a - \partial_\nu \omega_{b\mu}^a + \omega_{c\mu}^a \omega_{b\nu}^c - \omega_{c\nu}^a \omega_{b\mu}^c. \quad (3.43)$$

Para proyectar estas componentes “mixtas” sobre la base coordenada usamos la matriz de cambio de base  $e_a^\mu$  y su inversa  $e_\mu^a$ . Esto nos conduce a

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^\lambda &= e_a^\lambda T_{\mu\nu}^a, \\ &= e_a^\lambda \partial_\mu e_\nu^a + e_a^\lambda e_\nu^b \omega_{b\mu}^a - e_a^\lambda \partial_\nu e_\mu^a - e_a^\lambda e_\mu^b \omega_{b\nu}^a, \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} R_{\sigma\mu\nu}^\rho &= e_a^\rho e_\sigma^b R_{b\mu\nu}^a, \\ &= e_a^\rho e_\sigma^b (\partial_\mu \omega_{b\nu}^a - \partial_\nu \omega_{b\mu}^a + \omega_{c\mu}^a \omega_{b\nu}^c - \omega_{c\nu}^a \omega_{b\mu}^c). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Quisiéramos ahora relacionar estas componentes con los tensores de torsión y curvatura del cálculo tensorial usual, los cuales están dados por [cf. ecs. (3.7) y (3.10)]

$$T_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda, \quad (3.46)$$

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda. \quad (3.47)$$

Comparando (3.44) con (3.46) vemos que la identificación

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = e_a^\lambda (\partial_\mu e_\nu^a + \omega_{b\mu}^a e_\nu^b) \quad (3.48)$$

permite igualar el tensor de torsión proveniente del cálculo tensorial usual con las componentes sobre la base coordenada  $\{\partial_\mu\}$  de la 2-forma  $T^a = De^a$ . Más aún, si reemplazamos (3.48) en (3.47) encontramos (usando algo de clarividencia en el camino) que el tensor de curvatura de Riemann se corresponde exactamente con las componentes coordenadas de la 2-forma  $R_b^a = d\omega_b^a + \omega_c^a\omega_b^c$ . Parece entonces que la identificación (3.48) funciona notablemente bien. De hecho, ella tiene raíces profundas, pues proviene del requerimiento que un tensor sea un objeto geométrico independiente de las coordenadas. Para visualizar esto, consideremos un vector  $X$  y sus componentes en una base coordenada y en una base ortonormal local,

$$X = X^\mu \partial_\mu = X^a e_a. \quad (3.49)$$

La derivada covariante de este vector es un tensor  $DX$ . Sus componentes sobre una base coordenada  $\{dx^\mu \otimes \partial_\nu\}$  son

$$DX = (D_\mu X^\nu) dx^\mu \otimes \partial_\nu = (\partial_\mu X^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu X^\lambda) dx^\mu \otimes \partial_\nu. \quad (3.50)$$

En una base “mixta”  $\{dx^\mu \otimes e_a\}$ , en cambio, este mismo tensor es escrito como

$$DX = (DX^a) e_a = (dX^a + \omega_b^a X^b) e_a = (\partial_\mu X^a + \omega_{b\mu}^a X^b) dx^\mu \otimes e_a. \quad (3.51)$$

Podemos convertir esta última expresión a una base puramente coordenada usando  $e_a = e_a^\mu \partial_\mu$ :

$$DX = (e_a^\nu \partial_\mu X^a + e_a^\nu \omega_{b\mu}^a X^b) dx^\mu \otimes \partial_\nu. \quad (3.52)$$

Estas componentes deben, por supuesto, coincidir con aquellas de (3.50). Sustituyendo  $X^a = e_a^\mu X^\mu$ , esto significa exigir la igualdad

$$\partial_\mu X^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu X^\lambda = e_a^\nu \partial_\mu e_\lambda^a X^\lambda + \partial_\mu X^\nu + e_a^\nu \omega_{b\mu}^a e_\lambda^b X^\lambda, \quad (3.53)$$

donde hemos utilizado la identidad  $e_a^\mu e_\nu^a = \delta_\nu^\mu$ . Recordando que esta ecuación debe ser válida para cualquier vector  $X$ , encontramos la relación

$$\Gamma_{\mu\lambda}^\nu = e_a^\nu (\partial_\mu e_\lambda^a + \omega_{b\mu}^a e_\lambda^b), \quad (3.54)$$

la cual es idéntica con (3.48). Esta ecuación puede ser reescrita en la forma

$$D_\mu e_\nu^a = \partial_\mu e_\nu^a + \omega_{b\mu}^a e_\nu^b - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda^a = 0, \quad (3.55)$$

expresando la anulación de la derivada covariante “mixta” del vielbein. Este resultado, que es una consecuencia directa de la naturaleza geométrica de la derivada covariante de un vector, es conocido como **Lema de Weyl**. Notemos, sin embargo, que hemos asumido implícitamente que *la misma* derivada covariante actúa tanto en el espacio tangente como en la variedad base.

### 3.4. Relatividad General en el formalismo de Cartan

Habiendo introducido los objetos geométricos con los que contamos para describir localmente la geometría del espacio-tiempo, pasamos ahora a escribir un principio de acción que nos permita recuperar la Teoría General de la Relatividad en este nuevo esquema. Siguiendo la filosofía de considerar independientemente las características afines y las características métricas del espacio-tiempo, tomamos como nuestros campos fundamentales para la gravitación el vierbein  $e^a$  y la conexión de spin  $\omega_b^a$ . La acción de Einstein-Hilbert (3.14) en cuatro dimensiones puede ser escrita en términos de estos campos sencillamente como<sup>4</sup>

$$S_{\text{EH}}^{(4)} = \int \varepsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d. \quad (3.56)$$

Aquí la conexión de spin aparece a través de la curvatura  $R^{ab}$ , en tanto que el vierbein entra explícitamente. Debemos recordar que la conexión  $\omega_b^a$  transforma de modo no tensorial bajo transformaciones locales de Lorentz, de manera que su inclusión en la acción debe siempre hacerse en combinaciones que resulten tensoriales<sup>5</sup>, como ocurre con  $R^{ab}$ . Para comprobar la equivalencia de (3.56) con la acción de Einstein-Hilbert (3.14) sólo hace falta escribir explícitamente las bases de formas diferenciales en la curvatura y el vierbein. Así,

$$\varepsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d = \varepsilon_{abcd} R^{\rho\sigma} e_\mu^c e_\nu^d dx^\rho dx^\sigma dx^\mu dx^\nu.$$

Usando el vierbein para transformar los índices latinos de la curvatura en índices griegos (es decir, escribiendo sus componentes sobre la base ortonormal  $\{e_a\}$  en términos de sus componentes sobre la base coordenada  $\{\partial_\mu\}$ ), obtenemos

$$\varepsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d = \varepsilon_{abcd} R^{\kappa\lambda} e_\kappa^a e_\lambda^b e_\mu^c e_\nu^d dx^\rho dx^\sigma dx^\mu dx^\nu.$$

Ahora notamos que

$$\varepsilon_{abcd} e_\kappa^a e_\lambda^b e_\mu^c e_\nu^d = \varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} \det(e_\mu^a) = \sqrt{-g} \varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu},$$

<sup>4</sup>Así escrita, la acción resulta no ser adimensional, dado que el vierbein  $e^a$  tiene dimensiones de longitud. Esto puede repararse introduciendo una constante con dimensiones de  $[\text{longitud}]^{-2}$  en frente de la integral; sin embargo, su inclusión resulta inessential para la presente discusión, razón por la cual la omitimos.

<sup>5</sup>Esta afirmación no es estrictamente cierta. Un lagrangeano que no sea invariante bajo transformaciones locales de Lorentz, pero que transforme como  $L \rightarrow L' = L + d\Omega$ , puede conducir a una acción invariante si las condiciones de borde son escogidas apropiadamente.

donde la segunda igualdad se sigue de tomar determinante a ambos lados de la relación [cf. ec. (3.21)]  $e^a_\mu e^b_\nu \eta_{ab} = g_{\mu\nu}$ . Luego,

$$\varepsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d = \sqrt{-g} \varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} R^{\kappa\lambda}_{\rho\sigma} dx^\rho dx^\sigma dx^\mu dx^\nu.$$

Por otro lado, es claro que

$$dx^\rho dx^\sigma dx^\mu dx^\nu = \varepsilon^{\rho\sigma\mu\nu} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \varepsilon^{\rho\sigma\mu\nu} d^4x,$$

de donde

$$\begin{aligned} \varepsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d &= \sqrt{-g} \varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} R^{\kappa\lambda}_{\rho\sigma} \varepsilon^{\rho\sigma\mu\nu} d^4x, \\ &= \sqrt{-g} \delta^{\rho\sigma\mu\nu}_{\kappa\lambda\mu\nu} R^{\kappa\lambda}_{\rho\sigma} d^4x, \\ &= 2\sqrt{-g} \delta^{\rho\sigma}_{\kappa\lambda} R^{\kappa\lambda}_{\rho\sigma} d^4x, \\ &= 4\sqrt{-g} R^{\rho\sigma}_{\rho\sigma} d^4x, \\ &= 4\sqrt{-g} R d^4x. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\int \varepsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d = 4 \int d^4x \sqrt{-g} R. \quad (3.57)$$

Este cálculo muestra la equivalencia entre la acción de Hilbert escrita con formas diferenciales (3.56) y la forma con tensores (3.14).

Para obtener las ecuaciones de movimiento que se deducen de la acción (3.56), debemos exigir que ella tenga un valor estacionario frente a pequeñas perturbaciones  $\delta e^a$  y  $\delta\omega^{ab}$  en los campos. Partimos evaluando la acción para  $e^a + \delta e^a$  y  $\omega^{ab} + \delta\omega^{ab}$ . Esta es

$$S + \delta S = \int \varepsilon_{abcd} (R^{ab} + \delta R^{ab}) (e^c + \delta e^c) (e^d + \delta e^d),$$

en donde  $\delta R^{ab}$  y  $\delta S$  son las variaciones producidas en  $R^{ab}$  y  $S$ , respectivamente, cuando cambiamos  $e^a$  por  $e^a + \delta e^a$  y  $\omega^{ab}$  por  $\omega^{ab} + \delta\omega^{ab}$ . Asumiendo que  $\delta e^a$  y  $\delta\omega^{ab}$  son variaciones infinitesimales, podemos obtener una expresión correcta a primer orden para  $\delta S$ :

$$\delta S = \int \varepsilon_{abcd} (2R^{ab} e^c \delta e^d + \delta R^{ab} e^c e^d). \quad (3.58)$$

Para poder hacer más progresos necesitamos tener una expresión para  $\delta R^{ab}$  en términos de  $\delta\omega^{ab}$  ( $e^a$  no entra en la definición de  $R^{ab}$ ). De (3.35),

$$R^{ab} + \delta R^{ab} = d(\omega^{ab} + \delta\omega^{ab}) + (\omega^a_c + \delta\omega^a_c)(\omega^{cb} + \delta\omega^{cb}). \quad (3.59)$$

Desarrollando esta expresión y conservando sólo términos de primer orden, hallamos

$$\delta R^{ab} = d\delta\omega^{ab} + \omega^a_c \delta\omega^{cb} + \omega^b_c \delta\omega^{ac}. \quad (3.60)$$

Dado que la *diferencia* entre dos conexiones *sí* transforma tensorialmente bajo transformaciones locales de Lorentz, resulta legítimo escribir

$$\delta R^{ab} = D(\delta\omega^{ab}). \quad (3.61)$$

Introduciendo (3.61) en (3.58) y utilizando la regla de Leibniz (2.25) encontramos

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \varepsilon_{abcd} (2R^{ab} e^c \delta e^d + D(\delta\omega^{ab}) e^c e^d), \\ &= \int \varepsilon_{abcd} (2R^{ab} e^c \delta e^d + D(\delta\omega^{ab} e^c e^d) + \delta\omega^{ab} T^c e^d - \delta\omega^{ab} e^c T^d), \\ &= 2 \int \varepsilon_{abcd} R^{ab} e^c \delta e^d + 2 \int \varepsilon_{abcd} \delta\omega^{ab} T^c e^d + \int d(\varepsilon_{abcd} \delta\omega^{ab} e^c e^d). \end{aligned}$$

Esta variación consta de tres partes: la primera es proporcional a la variación en el vierbein, en tanto que la segunda es proporcional a la variación en la conexión. El último término es, por el Teorema de Stokes, un término de borde: éste puede ser anulado exigiendo, por ejemplo, que (i) la variación de  $\omega^{ab}$  se anule en el borde del espacio-tiempo o (ii) que el espacio-tiempo no tenga borde. En cualquier caso, la anulación de  $\delta S$  para variaciones arbitrarias de  $e^a$  y  $\omega^{ab}$  requiere que se satisfagan las ecuaciones de movimiento (en el vacío)

$$\varepsilon_{abcd} R^{ab} e^c = 0, \quad (3.62)$$

$$\varepsilon_{abcd} T^c e^d = 0. \quad (3.63)$$

La primera de estas ecuaciones es equivalente a las ecuaciones de campo de Einstein (3.15), como puede comprobarse escribiendo explícitamente las bases. La segunda, en cambio, puede ponerse en la forma

$$T^\mu_{\rho\sigma} - \delta^{\mu\nu} T^\lambda_{\lambda\nu} = 0, \quad (3.64)$$

en donde  $T^\mu_{\rho\sigma}$  son las componentes del tensor de torsión sobre la base coordenada  $\{\partial_\mu\}$ . Contrayendo  $\mu$  con  $\rho$  hallamos  $T^\lambda_{\lambda\nu} = 0$ , de modo que en realidad esta ecuación expresa la anulación de la torsión,

$$T^\mu_{\rho\sigma} = 0, \quad (3.65)$$

o bien,

$$T^a = de^a + \omega_b^a e^b = 0. \quad (3.66)$$

Esta última ecuación puede resolverse para  $\omega_b^a$ , de modo que finalmente uno puede tener la conexión de spin escrita en función del vierbein y sus derivadas. Sin embargo, esto constituye una ecuación del movimiento característica de la acción (3.56), y no una propiedad general que pueda ser invocada *a priori*.



# Capítulo 4

## Teorías de Gauge

### 4.1. Formalismo General

Sea  $\phi$  un campo escalar y sea  $S$  un funcional de acción que nos entrega sus ecuaciones de movimiento clásicas. Asumamos que  $S$  es invariante bajo las transformaciones  $\phi \rightarrow \phi' = e^{i\lambda}\phi$ , donde  $\lambda$  es una constante. La invariancia de la acción bajo esta transformación constituye una simetría de la teoría; dado que  $\lambda$  es constante, decimos que esta simetría es *global*. Por otro lado,  $\phi$  es un campo definido en todo el espacio-tiempo; de este modo, podría parecer demasiado restrictivo el verse obligado a realizar *la misma* transformación en cada punto del espacio-tiempo. Por ejemplo, en Mecánica Cuántica la función de onda está indeterminada por un factor de fase idéntico al que hemos propuesto. ¿Significa esto que si escogemos una fase determinada para la función de onda de una partícula en una región debemos escoger la misma para todo el resto del espacio-tiempo? Este tipo de consideraciones nos lleva a proponer que la simetría debe tener un carácter *local*; esto es, debemos ser capaces de hacer la transformación  $\phi \rightarrow \phi' = e^{i\lambda(x)}\phi$  sin alterar la física (es decir, dejando invariante la acción) en forma independiente en cada punto del espacio-tiempo. La realización de este paso nos presenta inmediatamente un problema. Para cualquier campo dinámico, la acción contendrá términos que involucren las derivadas del campo  $\phi$ . Bajo  $\phi \rightarrow \phi' = e^{i\lambda(x)}\phi$ , la derivada exterior de  $\phi$  transforma de acuerdo a

$$d\phi \rightarrow (d\phi)' = d(e^{i\lambda}\phi) = ie^{i\lambda}(d\lambda)\phi + e^{i\lambda}d\phi, \quad (4.1)$$

de modo que términos cinéticos como<sup>1</sup>  $d\phi^* \wedge \star d\phi$  resultan no ser invariantes bajo el cambio de fase local. Un modo de remediar esto es introducir una 1-forma  $A$  y definir una **derivada covariante**

$$D = d + A \quad (4.2)$$

tal que, por definición,  $D\phi$  transforme *covariantemente* bajo  $\phi \rightarrow \phi' = e^{i\lambda(x)}\phi$ ; esto es,

$$D\phi \rightarrow (D\phi)' = e^{i\lambda(x)}(D\phi). \quad (4.3)$$

Para conseguir esta ley de transformación para  $D\phi$  es necesario imponer que  $A$  transforme de acuerdo a

$$A \rightarrow A' = A - id\lambda. \quad (4.4)$$

Así,

$$(D\phi)' = d\phi' + A'\phi' = e^{i\lambda}D\phi.$$

Esta derivada covariante puede ser usada ahora en lugar de la derivada exterior ordinaria en el lagrangeano para garantizar la invariancia de la acción bajo la transformación local.

En cada punto del espacio-tiempo, el conjunto de todas las posibles transformaciones de fase forma un grupo, llamado  $U(1)$ . En 1954, Yang y Mills [18] generalizaron este principio desde  $U(1)$  a un grupo de Lie arbitrario  $G$ . La principal diferencia con el caso  $U(1)$  es que este último grupo es abeliano, y tiene además un solo generador. Para el caso general de un grupo de Lie arbitrario  $G$  con  $n$  generadores  $T_a$ ,  $a = 1, \dots, n$ , asumimos que la acción para un campo  $\psi$  debe ser invariante bajo las **transformaciones de gauge**<sup>2</sup>

$$\psi \rightarrow \psi' = U\psi, \quad (4.5)$$

donde  $U = \exp(\theta^a T_a)$  es un elemento del grupo  $G$ . Aquí  $\theta^a = \theta^a(x)$  son los parámetros reales locales necesarios y suficientes para determinar el elemento  $U$ . De este modo,  $U$  depende de  $x$  a través de los parámetros  $\theta^a$ . Al igual que en el caso abeliano, la derivada de  $\psi$  transforma inhomogéneamente bajo (4.5),

$$d\psi \rightarrow (d\psi)' = (dU)\psi + Ud\psi, \quad (4.6)$$

---

<sup>1</sup>Aquí  $\star$  representa el dual de Hodge, el cual relaciona una  $p$ -forma  $\alpha = (1/p!) \alpha_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_p}$  en un espacio de  $d$  dimensiones con una  $(d-p)$ -forma  $\star\alpha$  a través de  $\star\alpha = (1/p!(d-p)!) \sqrt{-g} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_d} \alpha^{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_{p+1}} \dots dx^{\mu_d}$ . Como se desprende de su definición, el dual de Hodge necesita la presencia de una métrica [20].

<sup>2</sup>Estrictamente hablando, debemos especificar la representación de  $G$  a la cual pertenece  $\psi$ . Este punto no tiene mayor relevancia para el análisis que sigue.

y la solución a este problema es también la misma que antes. Definimos una **derivada covariante**  $D$  como

$$D = d + A, \quad (4.7)$$

donde  $A$  es ahora una 1-forma que toma valores en el *álgebra de Lie* del grupo; esto es,

$$A = A^a T_a, \quad (4.8)$$

donde los coeficientes  $A^a = A^a_\mu dx^\mu$  de la combinación lineal son 1-formas. Esta derivada covariante así definida actúa naturalmente sobre objetos del espacio vectorial asociado con los generadores  $T_a$ ; esto es, sobre objetos que transforman como  $\psi \rightarrow \psi' = U\psi$ . El requerimiento que la derivada covariante de  $\psi$  transforme covariantemente bajo (4.5), esto es,

$$D\psi \rightarrow (D\psi)' = U(D\psi), \quad (4.9)$$

nos conduce a exigir que  $A$  cambie bajo (4.5) según la ley

$$A' = UAU^{-1} - (dU)U^{-1}. \quad (4.10)$$

En efecto, si reemplazamos (4.5) y (4.10) en la definición de derivada covariante (4.7) hallamos

$$(D\psi)' = d\psi' + A'\psi' = U(D\psi). \quad (4.11)$$

La ec. (4.10) contiene la ley de transformación para el **campo de gauge**  $A$ . Notemos que ésta es no covariante justo en el modo necesario para asegurar que la combinación  $D = d + A$  transforme covariantemente bajo el grupo.

De este modo, podemos reemplazar las derivadas exteriores  $d\psi$  que aparezcan en la acción para  $\psi$  por derivadas covariantes  $D\psi$  en orden de asegurar la invariancia de la acción bajo las transformaciones de gauge locales (4.5). El precio que hemos pagado es que la acción contiene ahora un campo extra que no tiene dinámica; es decir, ninguna derivada de  $A$  está presente en la acción. Esta situación es claramente insatisfactoria; quisiéramos incluir también en la acción un término cinético para el campo de gauge. Sin embargo, esto debe ser hecho con cuidado; el campo de gauge transforma de modo no tensorial, de manera que su derivada covariante ni siquiera está bien definida. Por lo tanto, lo que necesitamos es algún objeto construido a partir de  $A$  y sus derivadas que transforme covariantemente bajo el grupo. La respuesta a esta búsqueda viene de considerar la acción sucesiva de dos derivadas covariantes (4.7). Esta es

$$\begin{aligned} DD\psi &= (d + A)(d + A)\psi \\ &= (dA + A^2)\psi, \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde en el camino hemos usado la regla de Leibniz (2.25) para formas diferenciales, la cual involucra un cambio de signo para las formas de grado impar. Mientras que una 1-forma ordinaria es nilpotente, una 1-forma valuada en un álgebra de Lie, como  $A$ , no tiene por qué serlo; de hecho,  $A^2$  es una 2-forma valuada en la misma álgebra, con componentes

$$A^2 = \frac{1}{2} A_\mu^a A_\nu^b [T_a, T_b] dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (4.13)$$

La presencia aquí del conmutador  $[T_a, T_b]$ , originada en la antisimetría del producto exterior, es crucial para mantener a  $A^2$  dentro del álgebra. Del mismo modo que  $A^2$ ,  $dA$  es una 2-forma valuada en el álgebra del grupo de gauge:

$$dA = \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) T_a dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (4.14)$$

La combinación

$$F \equiv dA + A^2, \quad (4.15)$$

que surge naturalmente en (4.12), recibe el nombre de **intensidad de campo** y, de su definición, es una 2-forma que transforma covariantemente bajo el grupo de gauge. Esto es, si escribimos  $F' = dA' + A'^2$  e introducimos la ley de transformación (4.10) para  $A$ , hallamos<sup>3</sup>

$$F' = U F U^{-1}. \quad (4.16)$$

La intensidad de campo se presta entonces para construir un término cinético para el campo de gauge: está construido a partir de  $A$  y sus derivadas y transforma covariantemente bajo la acción del grupo. Una elección que ha resultado extremadamente fructífera para este término cinético es el **lagrangeano de Yang-Mills**,

$$L_{\text{YM}} = \langle F \wedge \star F \rangle, \quad (4.17)$$

donde los brackets  $\langle \dots \rangle$  denotan la traza o alguna otra forma multilineal invariante del álgebra. En el caso abeliano, donde el grupo de gauge es  $U(1)$ , podemos identificar el campo de gauge  $A$  con el potencial vectorial  $A_\mu$  de la teoría electromagnética. Así, la intensidad de campo  $F$  se corresponde con el tensor de Minkowski  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ , y el lagrangeano (4.17) resulta ser el lagrangeano de Maxwell  $L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ . De este modo, vemos que el Principio de Gauge junto con la Teoría Especial de la Relatividad permiten *deducir* toda la Electrodinámica de Maxwell.

---

<sup>3</sup>En esta deducción hemos ocupado la identidad  $dU^{-1} = -U^{-1}(dU)U^{-1}$ , la cual se sigue trivialmente de  $d(UU^{-1}) = 0$ .

## 4.2. El grupo de Poincaré

Resulta difícil no notar la extraordinaria similitud entre el tratamiento general para teorías de gauge dado en la sección anterior y el formalismo de Cartan para la gravitación dado en la sección 3.3. Esto ha motivado numerosos intentos por escribir la teoría general de la relatividad como una teoría de gauge para algún grupo de Lie. Con esto en mente, revisamos ahora el grupo de Poincaré, el cual juega un rol crucial en el desarrollo de la gravitación como una teoría de gauge.

El **grupo de Poincaré** es el grupo de isometrías del espacio de Minkowski. Esto significa que, en el espacio-tiempo plano, la métrica de Minkowski es dejada invariante si cambiamos las coordenadas  $x^\mu$  en una vecindad de un punto  $P$  por

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (4.18)$$

donde  $\Lambda^\mu_\nu$  y  $a^\mu$  son los parámetros reales (globales) de la transformación. Aquí  $\Lambda$  corresponde a una transformación de Lorentz, de modo que los coeficientes  $\Lambda^\mu_\nu$  deben satisfacer

$$\Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma \eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma}. \quad (4.19)$$

La parte restante en la transformación de Poincaré (4.18) corresponde a una traslación en  $a^\mu$  de las coordenadas.

Resulta útil para el análisis que sigue el considerar una transformación de Poincaré arbitrariamente cercana a la identidad; esto es, una para la cual los parámetros sean

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \lambda^\mu_\nu, \quad a^\mu = \varepsilon^\mu, \quad (4.20)$$

donde  $|\lambda^\mu_\nu| \ll 1$  y  $|\varepsilon^\mu| \ll 1$ . El requerimiento (4.19) para  $\Lambda^\mu_\nu$  impone sobre los parámetros infinitesimales  $\lambda^\mu_\nu$  la condición de antisimetría

$$\lambda_{\mu\nu} + \lambda_{\nu\mu} = 0. \quad (4.21)$$

En este caso podemos escribir la diferencia entre las coordenadas  $x'^\mu$  y  $x^\mu$  como

$$\delta x^\mu = \lambda^\mu_\nu x^\nu + \varepsilon^\mu. \quad (4.22)$$

Para las transformaciones infinitesimales de Lorentz es posible introducir matrices  $S_{\rho\sigma}$  con la propiedad

$$\lambda^\mu_\nu = \frac{1}{2} \lambda^{\rho\sigma} (S_{\rho\sigma})^\mu_\nu, \quad (4.23)$$

de manera que una transformación infinitesimal de Lorentz puede escribirse en la forma

$$\delta x^\mu = \frac{1}{2} \lambda^{\rho\sigma} (S_{\rho\sigma})^\mu_\nu x^\nu. \quad (4.24)$$

Esta ecuación nos dice que las matrices  $S_{\rho\sigma}$  forman una representación vectorial para los generadores del grupo de Lorentz, dado que es posible escribir la transformación infinitesimal como

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu} + \frac{1}{2}\lambda^{\rho\sigma} (S_{\rho\sigma})_{\nu}^{\mu}. \quad (4.25)$$

Esto quiere decir que para una transformación de Lorentz finita con parámetros  $\lambda^{\rho\sigma}$  tenemos la expresión

$$\Lambda = \exp\left(\frac{1}{2}\lambda^{\rho\sigma} S_{\rho\sigma}\right), \quad (4.26)$$

donde por comodidad hemos suprimido los índices matriciales. Desde este punto de vista, la ec. (4.25) contiene los dos primeros términos de la expansión en serie de (4.26). La forma explícita de las matrices  $S_{\rho\sigma}$  es fácilmente obtenida a partir de su definición [cf. ec. (4.23)]:

$$(S_{\rho\sigma})_{\nu}^{\mu} = \delta_{\rho}^{\mu}\eta_{\sigma\nu} - \delta_{\sigma}^{\mu}\eta_{\rho\nu}. \quad (4.27)$$

Usando esta representación de los generadores calculamos el álgebra de Lie del grupo de Lorentz, la cual está dada por los conmutadores

$$[S_{\rho\sigma}, S_{\mu\nu}] = \eta_{\mu\sigma}S_{\rho\nu} - \eta_{\mu\rho}S_{\sigma\nu} + \eta_{\nu\sigma}S_{\mu\rho} - \eta_{\nu\rho}S_{\mu\sigma}. \quad (4.28)$$

Aquí hemos nuevamente suprimido los índices matriciales, en el espíritu de que esta álgebra debe ser válida para los generadores del grupo de Lorentz sin importar la representación.

Podemos dar también una realización del grupo en términos de operadores diferenciales; ésta tiene la ventaja de que también podemos representar de esta manera a los operadores de traslación  $P_{\mu}$ , de modo que podemos encontrar las relaciones de conmutación entre éstos y las rotaciones de Lorentz  $\Lambda_{\nu}^{\mu}$ . En efecto, es directo verificar que es posible escribir una transformación infinitesimal de Poincaré como

$$\delta x^{\mu} = \left(\varepsilon^{\rho} P_{\rho} - \frac{1}{2}\lambda^{\rho\sigma} J_{\rho\sigma}\right) x^{\mu}, \quad (4.29)$$

donde los generadores de traslaciones y rotaciones son representados respectivamente por los operadores diferenciales

$$J_{\rho\sigma} = x_{\rho}\partial_{\sigma} - x_{\sigma}\partial_{\rho}, \quad (4.30)$$

$$P_{\rho} = \partial_{\rho}. \quad (4.31)$$

Además, los generadores  $J_{\rho\sigma}$  satisfacen las mismas relaciones de conmutación que las matrices  $S_{\rho\sigma}$ :

$$[J_{\rho\sigma}, J_{\mu\nu}] = \eta_{\mu\sigma}J_{\rho\nu} - \eta_{\mu\rho}J_{\sigma\nu} + \eta_{\nu\sigma}J_{\mu\rho} - \eta_{\nu\rho}J_{\mu\sigma}. \quad (4.32)$$

Usando la representación (4.30) - (4.31) encontramos las relaciones de conmutación entre  $J_{\rho\sigma}$  y  $P_\mu$ :

$$[J_{\rho\sigma}, P_\mu] = \eta_{\mu\sigma}P_\rho - \eta_{\mu\rho}P_\sigma. \quad (4.33)$$

Resumiendo, podemos escribir el **álgebra de Lie del grupo de Poincaré** como

$$[P_\rho, P_\mu] = 0, \quad (4.34)$$

$$[J_{\rho\sigma}, P_\mu] = \eta_{\mu\sigma}P_\rho - \eta_{\mu\rho}P_\sigma, \quad (4.35)$$

$$[J_{\rho\sigma}, J_{\mu\nu}] = \eta_{\mu\sigma}J_{\rho\nu} - \eta_{\mu\rho}J_{\sigma\nu} + \eta_{\nu\sigma}J_{\mu\rho} - \eta_{\nu\rho}J_{\mu\sigma}. \quad (4.36)$$

Ahora nos abocamos a usar el grupo de Poincaré como un grupo de gauge. Este grupo actuará sobre los elementos del espacio tangente de la variedad; para hacer resaltar este hecho, usaremos índices latinos en lugar de griegos en lo que sigue. Partimos definiendo una 1-forma conexión  $A$  valuada en el álgebra de Lie del grupo. Introduciendo 1-formas  $e^a$  y  $\omega^{ab}$  valuadas en  $\mathbb{R}$  escribimos  $A$  como

$$A = \frac{1}{2}\omega^{ab}J_{ab} + e^aP_a. \quad (4.37)$$

Como sabemos de la sección anterior, esta conexión debe transformar bajo el grupo como [cf. ec. (4.10)]

$$A' = UAU^{-1} - (dU)U^{-1}. \quad (4.38)$$

Para una transformación de Poincaré infinitesimal,  $U = 1 + u$ , esta ley adopta la forma

$$\delta A = -Du, \quad (4.39)$$

en donde hemos definido  $\delta A \equiv A' - A$ . Aquí la derivada covariante del grupo  $D$  actúa sobre un elemento  $u$  del álgebra como  $Du \equiv du + [A, u]$ . Si sustituimos ahora

$$u = \frac{1}{2}\lambda^{ab}J_{ab} + \varepsilon^aP_a, \quad (4.40)$$

encontramos

$$\delta A = -\frac{1}{2}(D\lambda^{ab})J_{ab} + (\lambda^a_b e^b - D\varepsilon^a)P_a, \quad (4.41)$$

donde las derivadas covariantes de  $\lambda^{ab}$  y  $\varepsilon^a$  son tomadas de la manera usual,

$$D\lambda^{ab} = d\lambda^{ab} + \omega^a_c\lambda^{cb} + \omega^b_c\lambda^{ac}, \quad (4.42)$$

$$D\varepsilon^a = d\varepsilon^a + \omega^a_c\varepsilon^c. \quad (4.43)$$

Esto significa que las componentes  $\omega^{ab}$  y  $e^a$  de la conexión tienen leyes de transformación dadas por

$$\delta\omega^{ab} = -D\lambda^{ab}, \quad (4.44)$$

$$\delta e^a = \lambda^a_b e^b - D\varepsilon^a. \quad (4.45)$$

El paso lógico siguiente es escribir la intensidad de campo  $F$  asociada a esta conexión de gauge. De la definición (4.15) para  $F$ , hallamos

$$F = \frac{1}{2}R^{ab}J_{ab} + T^a P_a, \quad (4.46)$$

donde hemos definido

$$T^a = de^a + \omega^a_b e^b, \quad (4.47)$$

$$R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^a_c \omega^{cb}, \quad (4.48)$$

en perfecto acuerdo con las definiciones de torsión y curvatura (3.34) y (3.35) dadas en la sección 3.3, si identificamos  $e^a$  y  $\omega^a_b$  con el vielbein y la conexión de spin, respectivamente. El verdadero problema de escribir la gravitación como una teoría de gauge radica en encontrar una acción que realice la simetría del grupo de Poincaré. Esta construcción sólo había sido llevada a cabo en dimensiones impares utilizando el grupo de (anti)-de Sitter [3, 6]. En las secciones siguientes se muestra una posibilidad de realizar la simetría de Poincaré (o anti-de Sitter) en cualquier número de dimensiones.

# Capítulo 5

## Gravitación en dimensiones mayores

*“There are really four dimensions, three which we call the three planes of Space, and a fourth, Time. There is, however, a tendency to draw an unreal distinction between the former three dimensions and the latter, because it happens that our consciousness moves intermittently in one direction along the latter from the beginning to the end of our lives.”*

*The Time Machine*, H. G. Wells (1898).

Nuestro sentidos parecen afirmar que el espacio tiene tres dimensiones; simplemente no podemos concebir movimientos que no ocurran en alguna de las tres direcciones cartesianas. Se requirió del genio de Minkowski para comprender que la interpretación del tiempo como una dirección adicional proveía del marco apropiado para la formulación de la teoría especial de la relatividad. Sin embargo, ya en 1854 Riemann se había cuestionado acerca de la dimensionalidad del “espacio real” y de la geometría adecuada para describirlo.

La hipótesis de que el espacio-tiempo pueda tener más de cuatro dimensiones ha llegado a ser usual en la física de altas energías. Por un lado, las distintas teorías de cuerdas sólo son consistentes en dimensiones más altas, como 26 para la cuerda bosónica y 10 para las supercuerdas [22]. Por otro lado, la teoría de supergravidad está formulada en 11 dimensiones [8], dado que es éste el número máximo permitido por la supersimetría. Más aún, se cree que la teoría unificada que contiene —vía compactificación— a las cinco teorías de cuerdas y a la supergravidad —como límite de bajas energías—, conocida como Teoría  $M$ , debe existir en 11 dimensiones. Todos estos indicios hacen que resulte imperativo el estudiar la extensión de la teoría

general de la relatividad a dimensiones más altas. El presente capítulo entrega los elementos esenciales de esta generalización.

## 5.1. Más allá de Einstein-Hilbert: los lagrangeanos de Lovelock

La acción de Einstein-Hilbert (3.56), con o sin una constante cosmológica, parece ser la elección más razonable para la geometría del espacio-tiempo en tres y cuatro dimensiones, pero no es claro que éste sea el caso para dimensiones mayores. En 1971, D. Lovelock planteó, y resolvió [16], el problema de encontrar todos los tensores  $A_{\mu\nu}$  que, en una dimensión arbitraria  $d$ , compartiesen con el tensor de Einstein  $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$  las siguientes propiedades:

1.  $A_{\mu\nu}$  es simétrico; esto es,

$$A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}. \quad (5.1)$$

2.  $A_{\mu\nu}$  es función del tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  y de sus primeras y segundas derivadas,

$$A_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}(g_{\mu\nu}, \partial_\rho g_{\mu\nu}, \partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (5.2)$$

3.  $A_{\mu\nu}$  tiene divergencia nula:

$$D_\nu A^{\mu\nu} = 0. \quad (5.3)$$

Las ecuaciones de campo para la gravitación (en el vacío) son entonces asumidas como  $A_{\mu\nu} = 0$ .

En este planteamiento está explícitamente *ausente* el requerimiento de que la dependencia de  $A_{\mu\nu}$  sobre las segundas derivadas del tensor métrico sea lineal. Como Lovelock muestra en su artículo, el tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$  y la métrica  $g_{\mu\nu}$  son las únicas soluciones posibles en cuatro dimensiones (sin exigir dependencia lineal en las segundas derivadas), conduciendo a las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0. \quad (5.4)$$

En dimensiones mayores, Lovelock encuentra una familia de tensores con potencias superiores del tensor de curvatura de Riemann que satisfacen los requerimientos impuestos, y entrega además un lagrangeano del cual estos pueden ser obtenidos.

En el lenguaje de formas diferenciales que hemos estado usando, este lagrangeano<sup>1</sup> puede ser escrito como<sup>2</sup>

$$L_{\text{LL}}^{(d)} = \sum_{p=0}^{[d/2]} \alpha_p L_p, \quad (5.5)$$

$$L_p = \varepsilon_{a_1 \dots a_d} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2p-1} a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \dots e^{a_d}, \quad (5.6)$$

en donde los  $\alpha_p$ 's son constantes arbitrarias. De acuerdo a lo demostrado por Lovelock, este lagrangeano da lugar a las ecuaciones de campo más generales posibles en una dimensión  $d$  arbitraria que comparten las mismas características que la Relatividad General usual en cuatro dimensiones. Notemos sin embargo que en este análisis se ha asumido que la torsión es idénticamente nula.

Desde un punto de vista moderno, parece más natural exigir que un lagrangeano sea

1. una  $d$ -forma invariante bajo transformaciones locales de Lorentz,
2. un polinomio local del vielbein  $e^a$ , la conexión de spin  $\omega_b^a$  y sus derivadas exteriores,
3. construido sin usar el dual de Hodge.

La primera de estas condiciones corresponde a la noción de que la acción debe ser un funcional de los campos, de modo que pueda escribirse como la integral de una  $d$ -forma (que es lo único que uno puede integrar en un espacio de  $d$  dimensiones). Al ser una  $d$ -forma, el lagrangeano es automáticamente invariante bajo transformaciones generales de coordenadas; la invariancia de Lorentz corresponde a la libertad de escoger la base ortonormal local en el espacio tangente del modo que uno desee. La segunda condición se refiere a que el lagrangeano debe ser construido usando las únicas formas definidas naturalmente en el espacio tangente; esto es, el vielbein y la conexión de spin. Como hemos visto, a partir de estas 1-formas podemos construir las 2-formas torsión y curvatura,  $T^a$  y  $R_b^a$ . Estos elementos, junto con los tensores

---

<sup>1</sup>El lagrangeano de la ec. (5.5) es a menudo llamado el **lagrangeano de Lanczos-Lovelock** (LL), en reconocimiento a una proposición similar hecha por C. Lanczos [15] para  $d = 5$  en 1938.

<sup>2</sup>Aquí  $[x]$  es la parte entera de  $x$ , la cual es definida como el único número entero  $n$  que cumple con  $n \leq x < n + 1$ .

invariantes<sup>3</sup>  $\varepsilon_{a_1 \dots a_d}$ ,  $\eta_{ab}$  y  $\eta^{ab}$ , serán los bloques de construcción básicos para el lagrangeano. La tercera condición asegura la imposibilidad de que las ecuaciones de movimiento para el vielbein y la conexión resulten de un orden superior al primero; al estar ausente el dual de Hodge, ninguna derivada de orden más alto puede aparecer, simplemente porque  $d^2 = 0$ . Por otro lado, la introducción del dual de Hodge requiere la presencia de una métrica en la variedad, es decir, de un medio para calcular el producto punto entre dos vectores. Si bien es posible recuperar la métrica a partir del vielbein por medio de  $g_{\mu\nu} = e^a_\mu e^b_\nu \eta_{ab}$ , su inclusión explícita en el lagrangeano rompe con una formulación en términos de cantidades definidas naturalmente en el espacio tangente. Además, la métrica no puede ser interpretada como un campo de gauge en el mismo sentido que el vielbein y la conexión de spin.

El problema de encontrar todos los lagrangeanos que, en una dimensión  $d$  dada, satisfagan estas condiciones fue resuelto por A. Mardones y J. Zanelli en [17]. Ellos encontraron que, en ausencia de torsión, la única solución posible está dada por los lagrangeanos de Lovelock (5.5), a excepción de las densidades de Pontryagin

$$\mathcal{P}_n = R^{a_1}_{a_2} R^{a_2}_{a_3} \dots R^{a_{n-1}}_{a_n} R^{a_n}_{a_1}, \quad (5.7)$$

las cuales existen sólo en dimensiones pares  $d = 2n$ , y son distintas de cero sólo si  $d = 4k$ , con  $k$  entero. Sin embargo, estas densidades son formas cerradas<sup>4</sup>; por el lema de Poincaré, ellas pueden escribirse localmente como derivadas totales, de modo que no contribuyen a las ecuaciones de movimiento.

Cuando permitimos la presencia de torsión surgen muchas nuevas posibilidades, las cuales están estudiadas con detalle en [17]. En lo que sigue, nos abocaremos a estudiar las propiedades de los lagrangeanos de Lovelock en forma exclusiva.

## 5.2. Ecuaciones de movimiento para la acción de Lovelock

En primer lugar, analizamos las ecuaciones de movimiento que surgen de (5.5). Como  $e^a$  y  $\omega^a_b$  son campos independientes, podemos considerar separadamente variaciones en uno y otro. Si hacemos la transformación infinitesimal  $e^a \rightarrow e^a + \delta e^a$  en

---

<sup>3</sup>El tensor de Levi-Civita es invariante (y tensor) sólo bajo transformaciones de Lorentz *propias*, esto es, aquellas que satisfacen  $\det(\Lambda) = +1$ . Este será siempre el caso cuando hablemos de transformaciones de Lorentz. Las transformaciones impropias pueden ser consideradas separadamente en las formas de reflexión espacial (paridad) e inversión temporal.

<sup>4</sup>Una  $p$ -forma  $\alpha$  se dice **cerrada** si satisface  $d\alpha = 0$ .

(5.6), hallamos

$$L_p + \delta L_p = \varepsilon_{a_1 \dots a_d} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2p-1} a_{2p}} (e^{a_{2p+1}} + \delta e^{a_{2p+1}}) \dots (e^{a_d} + \delta e^{a_d}).$$

La curvatura  $R^{ab}$  no cambia bajo esta transformación, ya que no depende de  $e^a$ . Conservando sólo términos de primer orden, podemos escribir  $\delta L_p$  en la forma

$$\delta L_p = (d - 2p) \varepsilon_{a_1 \dots a_d} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2p-1} a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \dots e^{a_{d-1}} \delta e^{a_d}.$$

Por lo tanto, la configuración del sistema que proporciona un valor estacionario a la acción bajo variaciones infinitesimales arbitrarias en el vielbein obedece a las ecuaciones de movimiento

$$\sum_{p=0}^{[(d-1)/2]} \alpha_p (d - 2p) \varepsilon_{a_1 \dots a_d} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2p-1} a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \dots e^{a_{d-1}} = 0. \quad (5.8)$$

Para transformaciones en la conexión de spin,  $\omega^{ab} \rightarrow \omega^{ab} + \delta\omega^{ab}$ , tenemos

$$L_p + \delta L_p = \varepsilon_{a_1 \dots a_d} (R^{a_1 a_2} + \delta R^{a_1 a_2}) \dots (R^{a_{2p-1} a_{2p}} + \delta R^{a_{2p-1} a_{2p}}) e^{a_{2p+1}} \dots e^{a_d},$$

de donde

$$\delta L_p = p \varepsilon_{a_1 \dots a_d} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2p-3} a_{2p-2}} \delta R^{a_{2p-1} a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \dots e^{a_d}.$$

Introduciendo  $\delta R^{ab} = D(\delta\omega^{ab})$  [cf. ec. (3.61)], obtenemos

$$\begin{aligned} \delta L_p &= p \varepsilon_{a_1 \dots a_d} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2p-3} a_{2p-2}} D(\delta\omega^{a_{2p-1} a_{2p}}) e^{a_{2p+1}} \dots e^{a_d} \\ &= p D(\varepsilon_{a_1 \dots a_d} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2p-3} a_{2p-2}} \delta\omega^{a_{2p-1} a_{2p}}) e^{a_{2p+1}} \dots e^{a_d}, \end{aligned}$$

donde hemos usado la identidad de Bianchi  $DR^{ab} = 0$  y el hecho que  $D\varepsilon_{a_1 \dots a_d} = 0$ . Usamos ahora la regla de Leibniz para escribir

$$\begin{aligned} \delta L_p &= d(p \varepsilon_{a_1 \dots a_d} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2p-3} a_{2p-2}} \delta\omega^{a_{2p-1} a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \dots e^{a_d}) + \\ &\quad + p \varepsilon_{a_1 \dots a_d} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2p-3} a_{2p-2}} \delta\omega^{a_{2p-1} a_{2p}} D(e^{a_{2p+1}} \dots e^{a_d}). \end{aligned}$$

Desarrollando la derivada covariante del producto de vielbeins y sustituyendo  $T^a = De^a$ , hallamos finalmente

$$\begin{aligned} \delta L_p &= d(p \varepsilon_{a_1 \dots a_d} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2p-3} a_{2p-2}} \delta\omega^{a_{2p-1} a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \dots e^{a_d}) + \\ &\quad + p(d - 2p) \varepsilon_{a_1 \dots a_d} \delta\omega^{a_1 a_2} R^{a_3 a_4} \dots R^{a_{2p-1} a_{2p}} T^{a_{2p+1}} e^{a_{2p+2}} \dots e^{a_d}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

El primer término es una derivada total, y no contribuye a las ecuaciones de movimiento. Para que la acción tenga un valor estacionario bajo esta transformación, requerimos que se cumplan las ecuaciones

$$\sum_{p=1}^{\lfloor (d-1)/2 \rfloor} \alpha_p p (d-2p) \varepsilon_{a_1 \dots a_d} R^{a_3 a_4} \dots R^{a_{2p-1} a_{2p}} T^{a_{2p+1}} e^{a_{2p+2}} \dots e^{a_d} = 0. \quad (5.10)$$

Las ecuaciones (5.8) y (5.10) dictan la dinámica de la geometría en la teoría de Lovelock. En cuatro dimensiones espacio-temporales, ellas se reducen a las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica más una ecuación que expresa la ausencia de torsión. En dimensiones superiores, sin embargo, la teoría de Lovelock es, en general, dinámicamente muy diferente a la de Einstein, con soluciones que no son ni siquiera perturbativamente cercanas a las de esta última [3].

### 5.3. El problema de los coeficientes

Una característica indeseable de la acción de Lovelock (5.5) es que ella contiene un cierto número de constantes arbitrarias  $\alpha_p$ . Cada  $\alpha_p$  tiene dimensiones de  $[L]^{-(d-2p)}$ , de modo que, en dimensiones pares, el último coeficiente,  $\alpha_{d/2}$ , es adimensional. Esto significa que, en general, tanto la acción de Lovelock como sus ecuaciones de movimiento asociadas contienen  $n = \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor$  constantes dimensionales arbitrarias. Esto presenta problemas en dos aspectos distintos. Primero, la dinámica del sistema no estará bien definida para un conjunto genérico de constantes. Esto es debido a la presencia de potencias superiores de las velocidades en el lagrangeano [3]. En segundo lugar, la aparición de constantes dimensionales en la acción hace más improbable la renormalizabilidad de la teoría cuántica asociada [23]. Estos dos problemas hacen que sea altamente deseable particularizar las constantes de algún modo. En [31], los  $\alpha_p$ 's son seleccionados de acuerdo al criterio que las condiciones de integrabilidad (o consistencia) para las ecuaciones de campo (5.8) y (5.10) no impongan restricciones algebraicas adicionales sobre los tensores de torsión y curvatura. Nosotros seguiremos esta ruta en dimensiones impares; en dimensiones pares, en cambio, los coeficientes serán seleccionados mediante el requerimiento que la teoría posea un único estado vacío.

### 5.3.1. Coeficientes para dimensiones impares

Para dimensiones impares<sup>5</sup>,  $d = 2n - 1$ , las sumatorias en (5.8) y (5.10) llegan hasta  $[(d - 1) / 2] = n - 1$ . Definiendo [31]

$$\mathcal{E}_a^{(p)} \equiv \varepsilon_{aa_2 \dots a_{2n-1}} R^{a_2 a_3} \dots R^{a_{2p} a_{2p+1}} e^{a_{2p+2}} \dots e^{a_{2n-1}}, \quad (5.11)$$

$$\mathcal{E}_{ab}^{(p)} \equiv \varepsilon_{aba_3 \dots a_{2n-1}} R^{a_3 a_4} \dots R^{a_{2p-1} a_{2p}} T^{a_{2p+1}} e^{a_{2p+2}} \dots e^{a_{2n-1}}, \quad (5.12)$$

y

$$\mathcal{E}_a \equiv \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p (d - 2p) \mathcal{E}_a^{(p)}, \quad (5.13)$$

$$\mathcal{E}_{ab} \equiv \sum_{p=1}^{n-1} \alpha_p p (d - 2p) \mathcal{E}_{ab}^{(p)}, \quad (5.14)$$

podemos escribir las ecuaciones de movimiento (5.8) y (5.10) como

$$\mathcal{E}_a = 0, \quad (5.15)$$

$$\mathcal{E}_{ab} = 0. \quad (5.16)$$

Las  $(d - 1)$ -formas  $\mathcal{E}_a$  y  $\mathcal{E}_{ab}$  son tensores de Lorentz independientes con el mismo número de componentes que  $e^a$  y  $\omega^{ab}$ . Más aún, dado que toda  $(d - 1)$ -forma es dual (vía el dual  $\star$  de Hodge) a una 1-forma, ambas tienen también el mismo número de componentes coordenadas. Esto quiere decir que las ecuaciones (5.15) y (5.16) son necesarias y suficientes para determinar completamente los campos  $e^a$  y  $\omega^{ab}$ . Sin embargo, si hubiesen relaciones algebraicas entre  $\mathcal{E}_a$  y  $\mathcal{E}_{ab}$ , entonces (5.15) y (5.16) no serían ecuaciones independientes, y algunas componentes del vielbein o la conexión quedarían indeterminadas.

Por otro lado, tomando la derivada covariante de  $\mathcal{E}_a^{(p)}$  y usando las identidades de Bianchi, encontramos las relaciones

$$D\mathcal{E}_a^{(p)} = 2(n - 1 - p) e^b \mathcal{E}_{ba}^{(p+1)}, \quad (5.17)$$

las cuales son válidas para  $0 \leq p \leq n - 1$ . En realidad,  $\mathcal{E}_{ba}^{(p+1)}$  no está bien definido para  $p = n - 1$ , pero en este caso el lado derecho de (5.17) se anula de todos modos (lo

---

<sup>5</sup>En general,  $n$  está definido como  $n = [\frac{d+1}{2}]$ . Esta definición permite escribir las dimensiones impares como  $d = 2n - 1$  y las pares como  $d = 2n$ .

cual es consistente, ya que  $D\mathcal{E}_a^{(n-1)} = 0$ ). Multiplicando (5.17) por  $(2n - 1 - 2p)\alpha_p$  y sumando para  $0 \leq p \leq n - 1$ , hallamos la identidad

$$D\mathcal{E}_a = \sum_{p=1}^{n-1} \alpha_{p-1} (2n - 2p) (2n - 2p + 1) e^b \mathcal{E}_{ba}^{(p)}, \quad (5.18)$$

la cual debe anularse *on-shell*, por consistencia con la ecuación de movimiento  $\mathcal{E}_a = 0$ . Más aún, tomando el producto exterior de  $e^b$  con  $\mathcal{E}_{ba}$  encontramos

$$e^b \mathcal{E}_{ba} = \sum_{p=1}^{n-1} \alpha_p p (2n - 1 - 2p) e^b \mathcal{E}_{ba}^{(p)}, \quad (5.19)$$

la cual también debe anularse *on-shell*, por consistencia con  $\mathcal{E}_{ab} = 0$ . Por lo tanto, tenemos las condiciones de consistencia (o integrabilidad)

$$\sum_{p=1}^{n-1} \alpha_{p-1} (2n - 2p) (2n - 2p + 1) e^b \mathcal{E}_{ba}^{(p)} = 0, \quad (5.20)$$

$$\sum_{p=1}^{n-1} \alpha_p p (2n - 1 - 2p) e^b \mathcal{E}_{ba}^{(p)} = 0. \quad (5.21)$$

Para un conjunto arbitrario de coeficientes  $\alpha_p$ , el único modo de satisfacer las condiciones (5.20) y (5.21) simultáneamente sería exigir  $e^b \mathcal{E}_{ba}^{(p)} = 0$  para algunos valores de  $p$ , lo cual haría que algunas componentes del vielbein y la conexión quedasen indeterminadas. Para evitar esta posibilidad, requerimos que ambas ecuaciones sean realmente una sola, y que  $e^b \mathcal{E}_{ba}^{(p)}$  pueda tomar cualquier valor. Esto implica que las sumatorias en (5.20) y (5.21) deben ser proporcionales término a término:

$$\gamma \alpha_{p-1} (2n - 2p) (2n - 2p + 1) e^b \mathcal{E}_{ba}^{(p)} = \alpha_p p (2n - 1 - 2p) e^b \mathcal{E}_{ba}^{(p)}. \quad (5.22)$$

Aquí  $\gamma$  es una constante con dimensiones de  $[L^2]$ . Esta ecuación nos conduce a la siguiente relación de recurrencia para los  $\alpha_p$ :

$$\alpha_p = \gamma \frac{2(n-p)(2n-2p+1)}{p(2n-1-2p)} \alpha_{p-1}, \quad (5.23)$$

con  $0 \leq p \leq n - 1$ . La solución a esta ecuación es

$$\alpha_p = \alpha_0 \frac{(2n-1)(2\gamma)^p}{(2n-1-2p)} \binom{n-1}{p}. \quad (5.24)$$

Así, de las  $n$  constantes dimensionales arbitrarias originalmente presentes en la acción, nos hemos quedado con dos;  $\alpha_0$  y  $\gamma$ . Resulta conveniente reparametrizar estas constantes de acuerdo a [31]

$$\alpha_0 = \frac{\kappa}{(2n-1)\ell^{2n-1}}, \quad (5.25)$$

$$\gamma = -\operatorname{sgn}(\Lambda) \frac{\ell^2}{2}, \quad (5.26)$$

donde  $\kappa$  es una constante con dimensiones de acción (adimensional cuando  $\hbar = 1$ ) y  $\ell$  es una constante con dimensiones de longitud. Haciendo los reemplazos correspondientes en (5.5), podemos escribir la acción de Lanczos-Lovelock en la forma<sup>6</sup>

$$S_{\text{CS}}^{(2n-1)} = \kappa \int \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\ell^{-(2n-1-2p)}}{(2n-1-2p)} \binom{n-1}{p} \varepsilon_{a_1 \dots a_{2n-1}} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2p-1} a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \dots e^{a_{2n-1}}. \quad (5.27)$$

La elección de coeficientes que hemos hecho conlleva una notable recompensa: la acción (5.27) es invariante no sólo bajo las usuales rotaciones locales de Lorentz

$$\delta e^a = \lambda^a_b e^b, \quad \delta \omega^{ab} = -D\lambda^{ab}, \quad (5.28)$$

sino que también bajo los **boosts de anti-de Sitter**

$$\delta e^a = -D\lambda^a, \quad \delta \omega^{ab} = \frac{1}{\ell^2} (\lambda^a e^b - \lambda^b e^a). \quad (5.29)$$

Esto puede ser visto notando que el lagrangeano

$$L_{\text{CS}}^{(2n-1)} = \kappa \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\ell^{-(2n-1-2p)}}{(2n-1-2p)} \binom{n-1}{p} \varepsilon_{a_1 \dots a_{2n-1}} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2p-1} a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \dots e^{a_{2n-1}} \quad (5.30)$$

es la forma de Euler-Chern-Simons para el grupo de anti-de Sitter  $SO(2n-2, 2)$ . Para demostrarlo, partimos acomodando  $e^a$  y  $\omega^{ab}$  en una conexión  $\hat{\omega}^{AB}$  para el grupo de anti-de Sitter en la forma

$$\hat{\omega}^{AB} = \begin{bmatrix} \hat{\omega}^{ab} & \hat{\omega}^{a,2n} \\ \hat{\omega}^{2n,b} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^{ab} & e^a/\ell \\ -e^b/\ell & 0 \end{bmatrix}.$$

---

<sup>6</sup>Aquí hemos escogido  $\Lambda < 0$ . En caso contrario, cada término en la sumatoria va multiplicado por un factor  $(-1)^p$ .

La consistencia de esta identificación es verificada comprobando que las transformaciones de gauge

$$\delta\hat{\omega}^{AB} = -D_{\hat{\omega}}\hat{\lambda}^{AB} \quad (5.31)$$

se corresponden exactamente con (5.28) y (5.29) si llamamos

$$\hat{\lambda}^{AB} = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}^{ab} & \hat{\lambda}^{a,2n} \\ \hat{\lambda}^{2n,b} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^{ab} & \lambda^a/\ell \\ -\lambda^b/\ell & 0 \end{bmatrix}.$$

La derivada exterior del lagrangeano de Euler-Chern-Simons (5.30) corresponde entonces a la densidad de Euler de  $2n$  dimensiones  $\mathbf{E}_{2n}$ ,

$$\begin{aligned} dL_{\text{CS}}^{(2n-1)} &= \frac{\kappa}{2n} \varepsilon_{A_1 \dots A_{2n}} \hat{R}^{A_1 A_2} \dots \hat{R}^{A_{2n-1} A_{2n}}, \\ &= \bar{\kappa} \mathbf{E}_{2n}, \end{aligned}$$

donde la curvatura de AdS  $\hat{R}^{AB} \equiv d\hat{\omega}^{AB} + \hat{\omega}_C^A \hat{\omega}^{CB}$  es descompuesta de acuerdo a

$$\hat{R}^{AB} = \begin{bmatrix} \hat{R}^{ab} & \hat{R}^{a,2n} \\ \hat{R}^{2n,b} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^{ab} + \frac{1}{\ell^2} e^a e^b & T^a/\ell \\ -T^b/\ell & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.32)$$

Por lo tanto, vemos que bajo (5.31) tendremos

$$\delta \left( dL_{\text{CS}}^{(2n-1)} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad d \left( \delta L_{\text{CS}}^{(2n-1)} \right) = 0,$$

lo cual significa que  $\delta L_{\text{CS}}^{(2n-1)}$  puede ser escrito localmente como una derivada total,  $\delta L_{\text{CS}}^{(2n-1)} = d\Omega$ . Así, la acción  $S_{\text{CS}}^{(2n-1)} = \int L_{\text{CS}}^{(2n-1)}$  resulta ser invariante bajo (5.31).

En resumen, podemos decir que existe una elección de coeficientes para la acción de Lanczos-Lovelock en dimensiones impares que conduce a una teoría de gauge para la gravitación, en el sentido de que todos los campos independientes son componentes de una conexión para el grupo  $SO(2n-2, 2)$  y la acción  $S_{\text{CS}}^{(2n-1)}$  es invariante bajo las transformaciones de gauge  $\delta\hat{\omega}^{AB} = -D_{\hat{\omega}}\hat{\lambda}^{AB}$ .

### 5.3.2. Coeficientes para dimensiones pares

En este caso seguimos una ruta distinta a la recorrida en dimensiones impares, donde los coeficientes fueron seleccionados mediante el requerimiento que las condiciones de integrabilidad para las ecuaciones de movimiento no impusiesen restricciones adicionales a los tensores de torsión y curvatura.

Comenzamos notando que el lagrangeano de Lovelock en  $d = 2n$  dimensiones

$$L_{\text{LL}}^{(2n)} = \sum_{p=0}^n \alpha_p \varepsilon_{a_1 \dots a_{2n}} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2p-1} a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \dots e^{a_{2n}} \quad (5.33)$$

puede ser reescrito como

$$L_{\text{LL}}^{(2n)} = \beta_0 \varepsilon_{a_1 \dots a_{2n}} (R^{a_1 a_2} - \beta_1 e^{a_1} e^{a_2}) \dots (R^{a_{2n-1} a_{2n}} - \beta_n e^{a_{2n-1}} e^{a_{2n}}), \quad (5.34)$$

donde los  $\beta$ 's son las raíces del polinomio cuyos coeficientes son los  $\alpha$ 's:

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n = \beta_0 (x - \beta_1) \dots (x - \beta_n). \quad (5.35)$$

En general, los  $\beta$ 's son números complejos con dimensiones de  $[L^{-2}]$ , con la restricción de que (5.34) sea real. Notemos que  $\beta_0$  es real y adimensional (cuando  $\hbar = 1$ ).

Las ecuaciones de movimiento para la acción que se obtiene del lagrangeano (5.34) permiten un máximo de  $n - 1$  soluciones de curvatura constante, las cuales representan distintos estados vacíos de la teoría. Los radios de curvatura de estos espacios son obtenidos a partir de las raíces de un polinomio de grado  $n - 1$  que involucra a los coeficientes  $\beta_1, \dots, \beta_n$  [9]. Esto constituye un inconveniente, ya que significa que la teoría posee un estado vacío  $n - 1$  veces degenerado. La única salida consiste en exigir que todos los  $\beta$ 's (a excepción de  $\beta_0$ ) sean iguales:  $\beta_1 = \dots = \beta_n \equiv -1/\ell^2$ , donde  $\ell$  es una constante con dimensiones de longitud<sup>7</sup>. Esto fija los coeficientes  $\alpha_p$  en términos de  $\ell$  y  $\beta_0 \equiv \kappa/2n$  como

$$\alpha_p = \frac{\kappa}{2n} \binom{n}{p} \ell^{-(2n-2p)}, \quad 0 \leq p \leq n, \quad (5.36)$$

de modo que el lagrangeano (5.33) puede ser escrito en la forma

$$L_{\text{BI}}^{(2n)} = \frac{\kappa}{2n} \varepsilon_{a_1 \dots a_{2n}} \left( R^{a_1 a_2} + \frac{1}{\ell^2} e^{a_1} e^{a_2} \right) \dots \left( R^{a_{2n-1} a_{2n}} + \frac{1}{\ell^2} e^{a_{2n-1}} e^{a_{2n}} \right). \quad (5.37)$$

Esta expresión corresponde al Pfaffiano<sup>8</sup> de la forma  $Z^{ab} \equiv R^{ab} + e^a e^b / \ell^2$ , el cual

<sup>7</sup>Esta elección implica escoger una constante cosmológica negativa. El caso  $\Lambda > 0$  es recuperado mediante el reemplazo  $\ell \rightarrow i\ell$ .

<sup>8</sup>En general, el determinante de una matriz antisimétrica  $A$  de  $2n \times 2n$  es el cuadrado de un polinomio llamado el Pfaffiano de  $A$  y denotado por  $\text{Pf}(A)$ . El Pfaffiano está dado por [20]

$$\text{Pf}(A) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1)\sigma(2)} \dots A_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)},$$

donde  $\sigma$  es un elemento del grupo de permutaciones de  $2n$  objetos.

puede ser escrito simbólicamente como

$$L_{\text{BI}}^{(2n)} = 2^{n-1} (n-1)! \kappa \sqrt{\det \left( R^{ab} + \frac{1}{\ell^2} e^a e^b \right)}. \quad (5.38)$$

Por esta razón, (5.37) es usualmente llamado el lagrangeano de Lovelock-Born-Infeld. Notemos que este lagrangeano incluye la densidad de Euler en  $2n$  dimensiones

$$\mathbf{E}_{2n} = \varepsilon_{a_1 \dots a_{2n}} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2n-1} a_{2n}} \quad (5.39)$$

con peso  $\alpha_n = \kappa/2n$ . La integral de esta densidad entrega el invariante topológico de Euler, el cual es insensible a deformaciones continuas de la variedad [20] y no contribuye a las ecuaciones de movimiento. Su presencia en la acción, sin embargo, garantiza la correcta definición de las cargas conservadas [1, 2] y la asignación de diferentes fases a distintas topologías en la teoría cuántica. Esto último es debido a que la inclusión de este término en la integral funcional produce un factor de fase que depende sólo de la topología de la variedad.

A diferencia de lo ocurrido en dimensiones impares, la acción

$$S_{\text{BI}}^{(2n)} = \frac{\kappa}{2n} \int \varepsilon_{a_1 \dots a_{2n}} \left( R^{a_1 a_2} + \frac{1}{\ell^2} e^{a_1} e^{a_2} \right) \dots \left( R^{a_{2n-1} a_{2n}} + \frac{1}{\ell^2} e^{a_{2n-1}} e^{a_{2n}} \right) \quad (5.40)$$

es invariante sólo bajo rotaciones locales de Lorentz, y no bajo boosts de AdS. Esta falta de invariancia impide la realización de la gravitación en dimensiones pares como una genuina teoría de gauge del grupo  $SO(2n-2, 2)$ .

# Capítulo 6

## Gravitación invariante bajo el grupo de Poincaré

La acción de Einstein-Hilbert

$$S_{\text{EH}}^{(4)} = \frac{\tilde{\kappa}}{2} \int \varepsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d \quad (6.1)$$

es invariante bajo difeomorfismos (dado que está escrita en términos de formas diferenciales) y bajo rotaciones locales de Lorentz en el espacio tangente. Podemos incluso agregar una constante cosmológica  $\Lambda = -3/\ell^2$  y un término de superficie<sup>1</sup>:

$$S_{\text{BI}}^{(4)} = \frac{\kappa}{4} \int \varepsilon_{abcd} \left( R^{ab} + \frac{1}{\ell^2} e^a e^b \right) \left( R^{cd} + \frac{1}{\ell^2} e^c e^d \right). \quad (6.2)$$

Como discutimos en el capítulo anterior, esta acción, conocida como la acción de Lovelock-Born-Infeld en cuatro dimensiones, nos provee de una teoría con un único estado vacío, dado por  $R^{ab} = -(1/\ell^2) e^a e^b$ . Esta propiedad es una consecuencia de la elección de coeficientes hecha en la acción de Lovelock, la cual permite escribir  $S_{\text{BI}}^{(4)}$  de modo factorizado, como en (6.2).

Sin embargo, la acción de Lovelock-Born-Infeld (6.2) no es invariante bajo las *traslaciones locales de Poincaré*

$$\delta_{\text{tlp}} e^a = -D\varepsilon^a, \quad \delta_{\text{tlp}} \omega^{ab} = 0. \quad (6.3)$$

---

<sup>1</sup>Aquí  $\kappa$  es una constante adimensional (cuando  $\hbar = 1$ ) relacionada con  $\tilde{\kappa}$  mediante  $\kappa = \ell^2 \tilde{\kappa}$ . La introducción de la escala de longitud  $\ell$  es necesaria debido a que el vielbein  $e^a$  tiene dimensiones de longitud.

En efecto, el cambio en  $S_{\text{BI}}^{(4)}$  bajo las transformaciones infinitesimales (6.3) está dado (salvo un término de borde) por

$$\delta_{\text{tlp}} S_{\text{BI}}^{(4)} = -\frac{\kappa}{\ell^2} \int \varepsilon_{abcd} \left( R^{ab} + \frac{3}{\ell^2} e^a e^b \right) T^c \varepsilon^d. \quad (6.4)$$

La invariancia de (6.2) bajo traslaciones locales de Poincaré requiere, por ejemplo, la exigencia *off-shell*  $T^a = 0$ , la cual es una ecuación del movimiento para la acción (6.2). Esto quiere decir que las traslaciones (6.3) serían a lo más una simetría *on-shell* de la acción (6.2). Las simetrías *on-shell* no son verdaderas simetrías, puesto que, cuando las ecuaciones de movimiento son satisfechas, la variación de cualquier acción bajo cualquier transformación infinitesimal es siempre igual a un término de borde. Esto significa que debemos admitir sin más que la acción de Lovelock-Born-Infeld (6.2) no es invariante bajo las traslaciones locales de Poincaré (6.3).

Este problema se presenta en todas las dimensiones pares  $d = 2n$ ; la acción de Lovelock-Born-Infeld [cf. ec. (5.40)]

$$S_{\text{BI}}^{(2n)} = \frac{\kappa}{2n} \int \varepsilon_{a_1 \dots a_{2n}} \left( R^{a_1 a_2} + \frac{1}{\ell^2} e^{a_1} e^{a_2} \right) \dots \left( R^{a_{2n-1} a_{2n}} + \frac{1}{\ell^2} e^{a_{2n-1}} e^{a_{2n}} \right) \quad (6.5)$$

no es invariante bajo las traslaciones locales de Poincaré (6.3). En las secciones siguientes presentamos una alternativa para construir una teoría de la gravitación invariante bajo el grupo de Poincaré en cualquier número de dimensiones. Primero revisamos el caso cuatridimensional y luego su generalización a una dimensión arbitraria  $d$ .

## 6.1. Gravedad cuatridimensional invariante bajo el grupo de Poincaré

Nuestra teoría de la gravitación en cuatro dimensiones tiene como característica principal la introducción de un nuevo campo  $\zeta^a(x)$ , el cual se comporta como un vector bajo transformaciones del grupo de Poincaré. El tratamiento que presentamos aquí está basado en las refs. [26, 12, 28].

Los campos independientes en esta teoría son la 1-forma vielbein  $e^a$ , la 1-forma conexión de spin  $\omega^{ab}$  y la 0-forma  $\zeta^a$ , la cual es conocida como “**coordenada de Poincaré**”. Bajo una rotación local de Lorentz con parámetros infinitesimales  $\lambda^{ab} = -\lambda^{ba}$ , estos campos transforman de acuerdo a las leyes

$$\delta e^a = \lambda^a_b e^b, \quad \delta \omega^{ab} = -D\lambda^{ab}, \quad \delta \zeta^a = \lambda^a_b \zeta^b, \quad (6.6)$$

donde  $D$  representa la derivada covariante en la conexión  $\omega$ . En cambio, bajo una traslación local de Poincaré con parámetros infinitesimales  $\epsilon^a$ , las leyes de transformación para estos campos son

$$\delta e^a = -D\epsilon^a, \quad \delta\omega^{ab} = 0, \quad \delta\zeta^a = \epsilon^a. \quad (6.7)$$

Esto significa que, bajo rotaciones locales de Lorentz,  $e^a$  y  $\zeta^a$  transforman como vectores y  $\omega^{ab}$  como conexión. En cambio, bajo traslaciones locales de Poincaré  $e^a$  transforma como conexión y  $\zeta^a$  como vector;  $\omega^{ab}$  es invariante bajo traslaciones.

Definimos ahora el “**vierbein no lineal**”  $V^a$  por medio de la ecuación

$$V^a \equiv e^a + D\zeta^a. \quad (6.8)$$

Este vierbein no lineal es una 1-forma con la misma estructura de índices que el vierbein usual  $e^a$ , y puede por lo tanto tomar su lugar en la acción de Lovelock-Born-Infeld (6.2). La ventaja que este reemplazo representa radica en las leyes de transformación de  $V^a$  bajo rotaciones locales de Lorentz y traslaciones locales de Poincaré. Estas pueden obtenerse reemplazando su definición (6.8) en las ecuaciones de transformación (6.6) y (6.7). El resultado es

$$\delta_{\text{rl}} V^a = \lambda^a_b V^b, \quad \delta_{\text{tlp}} V^a = 0. \quad (6.9)$$

Esto puede expresarse en palabras diciendo que  $V^a$  se comporta como un vector bajo rotaciones de Lorentz y es dejado invariante bajo traslaciones de Poincaré. Por lo tanto, al escribir la acción

$$S_{\text{SW}}^{(4)} = \frac{\kappa}{4} \int \varepsilon_{abcd} \left( R^{ab} + \frac{1}{\ell^2} V^a V^b \right) \left( R^{cd} + \frac{1}{\ell^2} V^c V^d \right), \quad (6.10)$$

podemos afirmar que  $S_{\text{SW}}^{(4)}$  es trivialmente invariante bajo traslaciones locales de Poincaré. La invariancia bajo rotaciones locales de Lorentz no es tocada, ya que el vierbein no lineal  $V^a$  se comporta como un vector (al igual que  $e^a$ ) bajo estas transformaciones.

Las ecuaciones de movimiento asociadas a la acción de Lovelock-Born-Infeld realizada no linealmente (6.10) pueden obtenerse del modo usual, exigiendo la anulación de sus variaciones con respecto a los campos independientes  $e^a$ ,  $\omega^{ab}$  y  $\zeta^a$ . Sin embargo, dado que  $e^a$  y  $\zeta^a$  aparecen sólo a través de  $V^a$ , resulta conveniente considerar variaciones de (6.10) con respecto a  $V^a$  y luego reemplazar  $\delta V^a$  de acuerdo con

$$\delta_e V^a = \delta e^a, \quad (6.11)$$

$$\delta_\omega V^a = \delta\omega^a_b \zeta^b, \quad (6.12)$$

$$\delta_\zeta V^a = D\delta\zeta^a. \quad (6.13)$$

Estas ecuaciones se siguen directamente de la definición del vierbein no lineal, ec. (6.8). Por otro lado, la curvatura  $R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^a_c \omega^{cb}$  depende sólo de la conexión de spin, y su variación con respecto a ésta puede escribirse como [cf. ec. (3.61)]

$$\delta_\omega R^{ab} = D(\delta\omega^{ab}). \quad (6.14)$$

Con estas consideraciones en mente, es directo demostrar que las ecuaciones de movimiento asociadas a la acción (6.10) son

$$\varepsilon_{abcd} \left( R^{ab} + \frac{1}{\ell^2} V^a V^b \right) V^c = 0, \quad (6.15)$$

$$\varepsilon_{abcd} \left[ \mathcal{T}^a V^b \delta_{ef}^{cd} + \left( R^{ab} + \frac{1}{\ell^2} V^a V^b \right) V^c (\zeta_e \delta_f^d - \zeta_f \delta_e^d) \right] = 0, \quad (6.16)$$

$$\varepsilon_{abcd} \left( R^{ab} + \frac{3}{\ell^2} V^a V^b \right) \mathcal{T}^c = 0, \quad (6.17)$$

donde  $\mathcal{T}^a \equiv DV^a$  es la “torsión no lineal” asociada<sup>2</sup> a  $V^a$ . Usando (6.15) en (6.16) podemos escribir el conjunto alternativo de ecuaciones

$$\varepsilon_{abcd} \left( R^{ab} + \frac{1}{\ell^2} V^a V^b \right) V^c = 0, \quad (6.18)$$

$$\varepsilon_{abcd} \mathcal{T}^a V^b = 0, \quad (6.19)$$

$$\varepsilon_{abcd} \left( R^{ab} + \frac{3}{\ell^2} V^a V^b \right) \mathcal{T}^c = 0. \quad (6.20)$$

Estas ecuaciones aún tienen un cierto grado de redundancia; en efecto, si tomamos la derivada covariante de (6.18) obtenemos la ecuación de movimiento para  $\zeta^a$ , ec. (6.20). Esto significa que (6.20) puede ser vista como una condición de consistencia (o integrabilidad) de la ec. (6.18), por lo que no necesita ser considerada separadamente. Las ecuaciones resultantes,

$$\varepsilon_{abcd} \left( R^{ab} + \frac{1}{\ell^2} V^a V^b \right) V^c = 0, \quad (6.21)$$

$$\varepsilon_{abcd} \mathcal{T}^a V^b = 0, \quad (6.22)$$

se corresponden exactamente con las ecuaciones de Einstein obtenidas a partir de la acción de Einstein-Hilbert con constante cosmológica bajo el reemplazo  $e^a \rightarrow V^a$ .

<sup>2</sup>El calificativo de “no lineal” dado a  $V^a$  y  $\mathcal{T}^a$  será justificado en el capítulo siguiente, donde se generaliza este formalismo desde Poincaré hasta (A)dS.

Esto quiere decir que si escogemos  $\zeta^a = 0$  esta teoría se hace indistinguible de la gravitación usual en 4 dimensiones, y la simetría de Poincaré es rota al grupo de Lorentz.

## 6.2. Gravedad en dimensiones pares invariante bajo el grupo de Poincaré

En esta sección construimos una teoría de la gravedad en una dimensión par  $d = 2n$  cuya acción es invariante bajo transformaciones locales del grupo de Poincaré. Al igual que en el caso cuadrimensional, los campos independientes en la teoría son el vielbein  $e^a$ , la conexión de spin  $\omega^{ab}$  y la coordenada de Poincaré  $\zeta^a$ . La acción para estos campos toma la forma de Lovelock-Born-Infeld,

$$S_{\text{SW}}^{(2n)} = \frac{\kappa}{2n} \int \varepsilon_{a_1 \dots a_{2n}} \left( R^{a_1 a_2} + \frac{1}{\ell^2} V^{a_1} V^{a_2} \right) \dots \left( R^{a_{2n-1} a_{2n}} + \frac{1}{\ell^2} V^{a_{2n-1}} V^{a_{2n}} \right), \quad (6.23)$$

donde  $R^{ab}$  es la curvatura asociada a la conexión  $\omega^{ab}$  y  $V^a$  es el vielbein no lineal  $V^a = e^a + D\zeta^a$ . Esta acción es por construcción invariante bajo las rotaciones locales de Lorentz

$$\delta e^a = \lambda^a_b e^b, \quad \delta \omega^{ab} = -D\lambda^{ab}, \quad \delta \zeta^a = \lambda^a_b \zeta^b, \quad (6.24)$$

ya que éstas implican que  $V^a$  transforma de acuerdo a  $\delta V^a = \lambda^a_b V^b$ . Adicionalmente, la acción (6.23) es invariante bajo las traslaciones locales de Poincaré

$$\delta e^a = -D\epsilon^a, \quad \delta \omega^{ab} = 0, \quad \delta \zeta^a = \epsilon^a. \quad (6.25)$$

En este caso la invariancia proviene del hecho que estas ecuaciones de transformación garantizan la invariancia del vielbein no lineal  $V^a$  bajo traslaciones, tal como ocurría para  $d = 4$ .

Las ecuaciones del movimiento asociadas a la acción (6.23) están dadas por

$$\varepsilon_{a_1 \dots a_{2n}} \left( R^{a_1 a_2} + \frac{1}{\ell^2} V^{a_1} V^{a_2} \right) \dots \left( R^{a_{2n-3} a_{2n-2}} + \frac{1}{\ell^2} V^{a_{2n-3}} V^{a_{2n-2}} \right) V^{a_{2n-1}} = 0, \quad (6.26)$$

$$\varepsilon_{a_1 \dots a_{2n}} \left( R^{a_3 a_4} + \frac{1}{\ell^2} V^{a_3} V^{a_4} \right) \dots \left( R^{a_{2n-3} a_{2n-2}} + \frac{1}{\ell^2} V^{a_{2n-3}} V^{a_{2n-2}} \right) \mathcal{T}^{a_{2n-1}} V^{a_{2n}} = 0, \quad (6.27)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{a_1 \dots a_{2n}} \left( R^{a_1 a_2} + \frac{2n-1}{\ell^2} V^{a_1} V^{a_2} \right) \left( R^{a_3 a_4} + \frac{1}{\ell^2} V^{a_3} V^{a_4} \right) \times \\ \times \dots \left( R^{a_{2n-3} a_{2n-2}} + \frac{1}{\ell^2} V^{a_{2n-3}} V^{a_{2n-2}} \right) \mathcal{T}^{a_{2n-1}} = 0. \end{aligned} \quad (6.28)$$

De estas dos, la primera corresponde a la invariancia de (6.23) bajo variaciones en  $e^a$ , en tanto que la segunda está ligada a la conexión de spin. La ecuación del movimiento (6.28), asociada a la coordenada de Poincaré  $\zeta^a$ , es igual a la derivada covariante de (6.26), y puede ser vista, por lo tanto, como una condición de integrabilidad de esta ecuación.

La introducción de la coordenada de Poincaré permite escribir una teoría para la gravitación en dimensiones pares cuya acción es localmente invariante bajo el grupo de Poincaré (así como también bajo difeomorfismos). La ecuación del movimiento asociada a la invariancia de la acción bajo variaciones en la coordenada de Poincaré puede siempre ser vista como una condición de integrabilidad de la ecuación del movimiento para el vielbein, y no necesita ser considerada separadamente. Las ecuaciones del movimiento para  $e^a$  y  $\omega^{ab}$  tienen exactamente la misma forma que aquellas para la acción de Lovelock-Born-Infeld

$$S_{\text{BI}}^{(2n)} = \frac{\kappa}{2n} \int \varepsilon_{a_1 \dots a_{2n}} \left( R^{a_1 a_2} + \frac{1}{\ell^2} e^{a_1} e^{a_2} \right) \dots \left( R^{a_{2n-1} a_{2n}} + \frac{1}{\ell^2} e^{a_{2n-1}} e^{a_{2n}} \right) \quad (6.29)$$

haciendo el reemplazo  $V^a \rightarrow e^a$ . La condición  $\zeta^a = 0$ , que es consistente con las ecuaciones del movimiento (6.26) - (6.28), es llamada “gauge físico”, y corresponde a identificar el vielbein no lineal  $V^a$  con  $e^a$ . En este caso ambos conjuntos de ecuaciones, aquellos asociados con  $S_{\text{BI}}^{(2n)}$  y los correspondientes a  $S_{\text{SW}}^{(2n)}$ , coinciden.

# Capítulo 7

## Gravitación invariante bajo el grupo de (anti-) de Sitter

En este capítulo escribimos una acción invariante bajo el grupo de anti-de Sitter<sup>1</sup>  $SO(d-1, 2)$  usando los campos no lineales  $V^a$  y  $W^{ab}$  encontrados a partir de los campos de gauge  $e^a$  y  $\omega^{ab}$ . Las referencias relevantes para la teoría general de realizaciones no lineales y teorías de gauge son [4, 7, 24]. La construcción que mostramos ahora fue llevada a cabo por primera vez por K. S. Stelle y P. C. West en [28], donde fue aplicada a la acción de Einstein-Hilbert en cuatro dimensiones. Su extensión a la acción de Lovelock en dimensiones más altas es el tema del presente capítulo y de la ref. [27].

### 7.1. La conexión no lineal

Consideremos un grupo de Lie  $G$  concebido como un grupo de transformaciones sobre una variedad  $M$ , y denotemos por  $H$  su subgrupo de estabilidad<sup>2</sup>. Sean  $g \in G$  y  $z \in G/H$  elementos de  $G$ . La acción de  $G$  sobre el espacio coseto  $G/H$  queda definida por la ecuación

$$gz = \bar{z}\bar{h}, \tag{7.1}$$

---

<sup>1</sup>Para fijar ideas, nos referiremos concretamente al grupo de anti-de Sitter  $SO(d-1, 2)$ . Los mismos resultados que presentamos son válidos también para el grupo de de Sitter, el cual puede ser obtenido haciendo el reemplazo  $\ell \rightarrow i\ell$ .

<sup>2</sup>El subgrupo de estabilidad es definido como el conjunto de todos los elementos de  $G$  que dejan invariante un punto particular de la variedad  $M$  (usualmente identificado como el “origen”).

donde  $\bar{z} \in G/H$  y  $\bar{h} \in H$ . Cuando  $g = h \in H$ , los elementos de  $G/H$  transforman en una representación lineal de  $H$ ; esto es,

$$\bar{z} = hzh^{-1}, \quad (7.2)$$

$$\bar{h} = h. \quad (7.3)$$

En general, sin embargo, la ec. (7.1) permite una dependencia no lineal de  $\bar{z}$  y  $\bar{h}$  en  $g$  y  $z$ .

Sea  $A$  una 1-forma conexión valuada en el álgebra de Lie de  $G$ . Su ley de transformación<sup>3</sup> bajo  $G$  es [cf. ec. (4.10)]

$$A \rightarrow A' = gAg^{-1} + gdg^{-1}. \quad (7.4)$$

Definimos ahora la “**conexión no lineal**”  $\tilde{A}$  mediante la ecuación

$$\tilde{A} \equiv z^{-1}Az + z^{-1}dz, \quad (7.5)$$

donde  $z \in G/H$ . Esta definición corresponde a efectuar una transformación de gauge sobre la conexión  $A$  con un elemento del coseto  $G/H$ . Bajo la acción de  $G$ ,  $\tilde{A}$  se transforma en

$$\tilde{A} \rightarrow \tilde{A}' = \bar{z}^{-1}A'\bar{z} + \bar{z}^{-1}d\bar{z}, \quad (7.6)$$

donde  $\bar{z}$  está dado por (7.1) y  $A'$  por (7.4). Sustituyendo (7.4) en (7.6) encontramos

$$\tilde{A}' = (g^{-1}\bar{z})^{-1}A(g^{-1}\bar{z}) + (g^{-1}\bar{z})^{-1}d(g^{-1}\bar{z}), \quad (7.7)$$

donde en el camino utilizamos la regla de Leibniz. De (7.1),  $g^{-1}\bar{z} = z\bar{h}^{-1}$ ; luego,  $\tilde{A}'$  resulta ser escrita en la forma

$$\tilde{A}' = \bar{h}\tilde{A}\bar{h}^{-1} + \bar{h}d\bar{h}^{-1}, \quad (7.8)$$

donde también hemos hecho uso de la regla de Leibniz. La ec. (7.8) contiene la ley de transformación de la conexión no lineal  $\tilde{A}$  bajo  $G$ . Notemos que corresponde a una transformación de gauge con un elemento de  $H$ , el cual debe obtenerse a partir de  $g$  y  $z$  resolviendo la ec. (7.1). Esta propiedad de  $\tilde{A}$  permite que una acción escrita en términos de  $A$  con invariancia bajo  $H$  pase a ser invariante bajo todo el grupo  $G$  cuando  $A$  es sustituida por  $\tilde{A}$ .

---

<sup>3</sup>La ec. (7.4) expresa exactamente la misma ley de transformación para la conexión que aquella que dedujimos en el tratamiento general para teorías de gauge, ec. (4.10). La diferencia aparente entre ambas se resuelve fácilmente notando que  $gdg^{-1} = -(dg)g^{-1}$ .

## 7.2. El formalismo de Stelle y West

Sea  $G = SO(d-1, 2)$  el grupo de anti-de Sitter y sea  $H = SO(d-1, 1)$  el (sub)grupo de Lorentz. La acción de Lovelock

$$S_{\text{LL}}^{(d)} = \int \sum_{p=0}^{[d/2]} \alpha_p \varepsilon_{a_1 \dots a_d} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2p-1} a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \dots e^{a_d} \quad (7.9)$$

es, en general, invariante sólo bajo  $H$ , y no bajo los boosts de AdS pertenecientes al coseto  $G/H$ . La acción (7.9) es un funcional de la conexión

$$A = e^a P_a + \frac{1}{2} \omega^{ab} J_{ab}, \quad (7.10)$$

donde  $P_a$  y  $J_{ab}$  forman una base para el álgebra de Lie de AdS (ver Apéndice C). Sea  $z = \exp(\zeta^a P_a)$  un elemento del coseto  $G/H$ , y definamos la conexión no lineal

$$\tilde{A} = V^a P_a + \frac{1}{2} W^{ab} J_{ab} \quad (7.11)$$

mediante la relación [cf. ec. (7.5)]

$$\frac{1}{2} W^{ab} J_{ab} + V^a P_a = \exp(-\zeta^c P_c) \left( d + \frac{1}{2} \omega^{ab} J_{ab} + e^a P_a \right) \exp(\zeta^d P_d). \quad (7.12)$$

La ec. (7.12) representa una transformación de gauge con un elemento de  $G/H$  sobre la conexión de AdS (7.10).

El cálculo de las expresiones explícitas para  $W^{ab}$  y  $V^a$  que se obtienen a partir de (7.12) está desarrollado en el Apéndice E; el resultado es

$$V^a = T_b^a (\ln \cosh z) e^b + T_b^a \left( \ln \frac{\sinh z}{z} \right) D_\omega \zeta^b, \quad (7.13)$$

$$W^{ab} = \omega^{ab} - \frac{1}{\ell^2} \left[ \left( \frac{\sinh z}{z} \right) e^c + \left( \frac{\cosh z - 1}{z^2} \right) D_\omega \zeta^c \right] (\zeta^a \delta_c^b - \zeta^b \delta_c^a), \quad (7.14)$$

donde  $z = \zeta/\ell = (1/\ell) (\zeta^a \zeta_a)^{1/2}$ ,  $D_\omega \zeta^a \equiv d\zeta^a + \omega_b^a \zeta^b$  es la derivada covariante (en la conexión  $\omega$ ) de  $\zeta^a$  y hemos definido

$$T_b^a(u) \equiv e^u \delta_b^a + (1 - e^u) \frac{\zeta^a \zeta_b}{\zeta^2}. \quad (7.15)$$

Estas matrices  $T$  serán usadas repetidamente en lo que sigue; sus propiedades se encuentran expuestas en el Apéndice G.

Bajo una transformación local  $g \in SO(d-1, 2)$ , estos campos transforman de acuerdo a

$$V'^a P_a = h (V^a P_a) h^{-1}, \quad (7.16)$$

$$\frac{1}{2} W'^{ab} J_{ab} = h \left( \frac{1}{2} W^{ab} J_{ab} \right) h^{-1} + h d h^{-1}. \quad (7.17)$$

Aquí es de crucial importancia notar que  $h \in H$  es un elemento del (sub)grupo de Lorentz, el cual es obtenido de la relación [cf. ec. (7.1)]

$$g \exp(\zeta'^a P_a) = \exp(\zeta^a P_a) h, \quad (7.18)$$

donde  $g \in G$ . La versión infinitesimal de (7.18) es

$$\exp(-\zeta^b P_b) (g - 1) \exp(\zeta^a P_a) - \exp(-\zeta^b P_b) \delta \exp(\zeta^a P_a) = h - 1, \quad (7.19)$$

donde hemos puesto

$$g = 1 + (g - 1), \quad (7.20)$$

$$h = 1 + (h - 1), \quad (7.21)$$

$$\exp(\zeta'^a P_a) = \exp(\zeta^a P_a) + \delta \exp(\zeta^a P_a). \quad (7.22)$$

Cuando  $g$  es una transformación de Lorentz,  $g \in H$ , la ec. (7.18) implica que  $h = g$  y que los  $\zeta'^a$  son funciones lineales de  $h$  y  $\zeta^a$ , resultando en

$$\exp(\zeta'^a P_a) = h \exp(\zeta^a P_a) h^{-1}. \quad (7.23)$$

Sustituyendo  $h - 1 = \frac{1}{2} h^{ab} J_{ab}$  encontramos

$$\delta \zeta^a = h^a_b \zeta^b, \quad (7.24)$$

donde, como es usual, hemos definido  $\delta \zeta^a \equiv \zeta'^a - \zeta^a$ . Esta ley de transformación nos dice sencillamente que  $\zeta^a$  se comporta como un vector bajo transformaciones de Lorentz.

Para un boost de AdS, hacemos  $g - 1 = \epsilon^a P_a$  en (7.19) y obtenemos

$$\delta \zeta^a = T^a_b \left( \ln \frac{z \cosh z}{\sinh z} \right) \epsilon^b, \quad (7.25)$$

$$h = 1 + \frac{1}{2\ell^2} \frac{\cosh z - 1}{z \sinh z} (\epsilon^a \zeta^b - \epsilon^b \zeta^a) J_{ab}. \quad (7.26)$$

El cálculo detallado de estas expresiones se muestra en el Apéndice F. Este  $h \in H$  en particular es el que debe ser usado en las ecs. (7.16) - (7.17) para deducir las leyes de transformación de  $V^a$  y  $W^{ab}$  bajo un boost de AdS.

Las versiones infinitesimales de (7.16) y (7.17) son fácilmente obtenidas tomando  $h = 1 + \frac{1}{2}h^{ab}J_{ab}$  y usando el álgebra de AdS: ellas son

$$\delta V^a = h^a_b V^b, \quad (7.27)$$

$$\delta W^{ab} = -D_W h^{ab}. \quad (7.28)$$

Aquí  $D_W h^{ab} \equiv dh^{ab} + W^a_c h^{cb} + W^b_c h^{ac}$  es la derivada covariante (en la conexión  $W^{ab}$ ) de  $h^{ab}$ . Vemos de (7.27) y (7.28) que  $V^a$  transforma como un vector y  $W^{ab}$  como conexión, pero con un elemento del grupo que es una función no lineal, en general, de sus parámetros [ver ec. (7.18)]. Más explícitamente, podemos decir que, para una transformación de Lorentz, los  $h^{ab}$  son directamente los parámetros de la transformación, en tanto que para un boost de AdS con parámetros  $\epsilon^a$ , los  $h^{ab}$  deben obtenerse a partir de (7.26).

El grupo de Poincaré es recuperado en el límite  $\ell \rightarrow \infty$ . En este caso,  $V^a$  y  $W^{ab}$  se reducen a

$$V^a = e^a + D_\omega \zeta^a, \quad (7.29)$$

$$W^{ab} = \omega^{ab}. \quad (7.30)$$

Así, los correspondientes  $\delta\zeta^a$  y  $h$  para una *traslación* (ex boost) son

$$\delta\zeta^a = \epsilon^a, \quad (7.31)$$

$$h = 1. \quad (7.32)$$

De este modo, las leyes de transformación de  $V^a$  y  $W^{ab}$  llegan a ser

$$\delta V^a = 0, \quad (7.33)$$

$$\delta W^{ab} = 0. \quad (7.34)$$

Estos campos coinciden con aquellos que fueron utilizados en la sección 6.1 para construir una teoría de la gravitación invariante bajo el grupo de Poincaré. Su obtención en este nuevo contexto muestra que la teoría que desarrollaremos en lo que sigue es una generalización directa de estas ideas. En la sección siguiente escribimos una teoría para la gravedad cuya acción es invariante bajo la acción del grupo de anti-de Sitter, y mostramos como nuestros resultados se reducen a los de la sección 6.1 cuando hacemos el límite  $\ell \rightarrow \infty$ .

### 7.3. Gravitación invariante bajo el grupo de anti-de Sitter

En esta sección escribimos una teoría para la gravitación en  $d$  dimensiones, cuya acción es invariante bajo el grupo de anti-de Sitter  $SO(d-1, 2)$ . Los campos independientes en la acción son el vielbein  $e^a$ , la conexión de spin  $\omega^{ab}$  y la coordenada del espacio interno  $\{SO(d-1, 2)/SO(d-1, 1)\}$ ,  $\zeta^a$ . Estas variables aparecen en la acción de manera indirecta, a través de los campos no lineales  $V^a$  y  $W^{ab}$ . La relación precisa entre ellos es [cf. ecs. (7.13) y (7.14)]

$$V^a = T_b^a(\ln \cosh z) e^b + T_b^a \left( \ln \frac{\sinh z}{z} \right) D_\omega \zeta^b, \quad (7.35)$$

$$W^{ab} = \omega^{ab} - \frac{1}{\ell^2} \left[ \left( \frac{\sinh z}{z} \right) e^c + \left( \frac{\cosh z - 1}{z^2} \right) D_\omega \zeta^c \right] (\zeta^a \delta_c^b - \zeta^b \delta_c^a), \quad (7.36)$$

donde  $T_b^a(u)$  está definida en (G.1),  $D_\omega \zeta^a \equiv d\zeta^a + \omega_b^a \zeta^b$  es la derivada covariante (en la conexión  $\omega$ ) de  $\zeta^a$ , y  $z = \zeta/\ell$ . Cuando  $\ell \rightarrow \infty$  recuperamos, por la vía de una contracción de Inönü-Wigner, el grupo de Poincaré  $ISO(d-1, 1)$ .

Consideramos ahora el lagrangeano de Lovelock (5.5), construido con  $V^a$  en vez de  $e^a$  y con el tensor de curvatura

$$\mathcal{R}^{ab} \equiv dW^{ab} + W_c^a W^{cb}, \quad (7.37)$$

en vez de  $R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega_c^a \omega^{cb}$ . Esta construcción arroja como resultado la acción

$$S_{\text{SW}}^{(d)} = \int \sum_{p=0}^{[d/2]} \alpha_p L_p, \quad (7.38)$$

$$L_p = \varepsilon_{a_1 \dots a_d} \mathcal{R}^{a_1 a_2} \dots \mathcal{R}^{a_{2p-1} a_{2p}} V^{a_{2p+1}} \dots V^{a_d}. \quad (7.39)$$

La acción (7.38) es invariante bajo las transformaciones de Lorentz

$$\delta V^a = h_b^a V^b, \quad (7.40)$$

$$\delta W^{ab} = -D_W h^{ab}, \quad (7.41)$$

$$\delta \zeta^a = h_b^a \zeta^b, \quad (7.42)$$

donde  $h^{ab} = -h^{ba}$  son los parámetros infinitesimales de la transformación. Esta invariancia está asegurada por construcción en (7.38); como  $\mathcal{R}^{ab}$  y  $V^a$  transforman

tensorialmente bajo (7.40) - (7.42), el lagrangeano (que tiene todos sus índices contraídos) es un escalar del grupo.

Bajo un boost de AdS con parámetro  $\epsilon^a$  generado por  $P_a$ , los campos  $V^a$ ,  $W^{ab}$  y  $\zeta^a$  cambian en

$$\delta V^a = h^a_b V^b, \quad (7.43)$$

$$\delta W^{ab} = -D_W h^{ab}, \quad (7.44)$$

$$\delta \zeta^a = T^a_b \left( \ln \frac{z \cosh z}{\sinh z} \right) \epsilon^b, \quad (7.45)$$

donde ahora

$$h^{ab} = \frac{1}{\ell^2} \frac{\cosh z - 1}{z \sinh z} (\epsilon^a \zeta^b - \epsilon^b \zeta^a). \quad (7.46)$$

Es claro que tanto las rotaciones de Lorentz como los boosts de AdS constituyen simetrías de la acción (7.38). A nivel superficial, ambas coinciden;  $\delta V^a$  y  $\delta W^{ab}$  tienen la misma forma en los dos casos. La diferencia proviene de la forma explícita que adopta el parámetro y de la ley de transformación para  $\zeta^a$ .

### 7.3.1. Ecuaciones de movimiento para la acción de Lovelock

Para deducir las ecuaciones de movimiento asociadas a la acción (7.38), debemos analizar cómo cambia cuando realizamos pequeñas variaciones en los campos independientes. Podemos variar independientemente  $e^a$  y  $\omega^{ab}$ , y calcular a partir de estas variaciones las correspondientes para  $V^a$  y  $W^{ab}$ . Por otro lado, también podemos llevar a cabo variaciones arbitrarias e independientes en  $\zeta^a$ . Por lo tanto, consideraremos la respuesta de la acción (7.38) bajo variaciones arbitrarias en los campos fundamentales  $e^a$ ,  $\omega^{ab}$  y  $\zeta^a$ . Sin embargo, no podemos dejar de notar que las variables que aparecen directamente en la acción son  $V^a$  y  $W^{ab}$ ; de este modo, resulta conveniente analizar primero cómo cambian estos campos bajo variaciones arbitrarias en  $e^a$  y  $\omega^{ab}$ . Si consideramos variaciones arbitrarias en  $e^a$ , entonces

$$\delta_e V^a = T^a_b (\ln \cosh z) \delta e^b, \quad (7.47)$$

$$\delta_e W^{ab} = -\frac{1}{\ell^2} \left( \frac{\sinh z}{z} \right) (\zeta^a \delta_c^b - \zeta^b \delta_c^a) \delta e^c. \quad (7.48)$$

Para variaciones arbitrarias en  $\omega^{ab}$ , en cambio, encontramos

$$\delta_\omega V^a = -\frac{1}{2} \frac{\sinh z}{z} (\zeta_c \delta_d^a - \zeta_d \delta_c^a) \delta\omega^{cd}, \quad (7.49)$$

$$\delta_\omega W^{ab} = \frac{1}{2} \left[ \delta_{cd}^{ab} + \frac{1}{\ell^2} \left( \frac{\cosh z - 1}{z^2} \right) (\zeta^a \delta_e^b - \zeta^b \delta_e^a) (\zeta_c \delta_d^e - \zeta_d \delta_c^e) \right] \delta\omega^{cd}. \quad (7.50)$$

Las ecuaciones (7.47) - (7.50) nos serán de utilidad para deducir las ecuaciones de movimiento asociadas a (7.38).

Bajo variaciones arbitrarias en los campos no lineales  $V^a$  y  $W^{ab}$ , (7.38) cambia (módulo un término de borde) por

$$\delta S_{\text{SW}}^{(d)} = \int \sum_{p=0}^{[d/2]} \alpha_p \delta L_p, \quad (7.51)$$

donde

$$\delta L_p = p(d-2p) \delta W^{ab} \mathcal{E}_{ab}^{(p)} + (d-2p) \delta V^a \mathcal{E}_a^{(p)}, \quad (7.52)$$

y hemos definido

$$\mathcal{E}_a^{(p)} \equiv \varepsilon_{aa_2 \dots a_d} \mathcal{R}^{a_2 a_3} \dots \mathcal{R}^{a_{2p} a_{2p+1}} V^{a_{2p+2}} \dots V^{a_d}, \quad (7.53)$$

$$\mathcal{E}_{ab}^{(p)} \equiv \varepsilon_{aba_3 \dots a_d} \mathcal{R}^{a_3 a_4} \dots \mathcal{R}^{a_{2p-1} a_{2p}} \mathcal{T}^{a_{2p+1}} V^{a_{2p+2}} \dots V^{a_d}. \quad (7.54)$$

Reemplazando (7.47) y (7.48) en (7.51) hallamos las ecuaciones de movimiento asociadas a  $e^a$ , las cuales son

$$\sum_{p=0}^{[(d-1)/2]} \alpha_p (d-2p) \left[ \frac{2}{\ell^2} p \left( \frac{\sinh z}{z} \right) \mathcal{E}_{ab}^{(p)} \zeta^b + T_a^b (\ln \cosh z) \mathcal{E}_b^{(p)} \right] = 0. \quad (7.55)$$

Del mismo modo, si reemplazamos (7.49) y (7.50) en (7.51) encontramos las ecuaciones de movimiento asociadas a  $\omega^{ab}$ :

$$\sum_{p=0}^{[d/2]} \alpha_p (d-2p) \left[ p \mathcal{E}_{cd}^{(p)} - p \frac{1}{\ell^2} \left( \frac{\cosh z - 1}{z^2} \right) (\zeta_c \delta_d^e - \zeta_d \delta_c^e) \mathcal{E}_{ea}^{(p)} \zeta^a + \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{\sinh z}{z} (\zeta_c \delta_d^a - \zeta_d \delta_c^a) \mathcal{E}_a^{(p)} \right] = 0. \quad (7.56)$$

Las ecuaciones (7.55) y (7.56) pueden ser puestas también en la forma

$$\sum_{p=0}^{[(d-1)/2]} \alpha_p (d-2p) \mathcal{E}_a^{(p)} = 0, \quad (7.57)$$

$$\sum_{p=1}^{[(d-1)/2]} \alpha_p p (d-2p) \mathcal{E}_{ab}^{(p)} = 0. \quad (7.58)$$

En el “gauge físico”  $\zeta^a = 0$ , (7.57) y (7.58) llegan a ser coincidentes con las ecuaciones de movimiento para la gravedad de Lanczos-Lovelock obtenidas en [31]. Incluso cuando  $\zeta^a \neq 0$ , la forma de las ecuaciones es idéntica, con  $e^a$  y  $\omega^{ab}$  reemplazados por  $V^a$  y  $W^{ab}$ . Esto significa que (7.57) y (7.58) son las mismas ecuaciones que hubiésemos obtenido variando  $V^a$  y  $W^{ab}$  como campos independientes. Por lo tanto, toda la dinámica de los campos  $e^a$ ,  $\omega^{ab}$  y  $\zeta^a$  ha sido absorbida en  $V^a$  y  $W^{ab}$ . En consecuencia, la ecuación de movimiento asociada a variaciones arbitrarias en  $\zeta^a$  no es una ecuación independiente, sino que puede obtenerse a partir de (7.57) y (7.58). En efecto, cuando  $\ell \rightarrow \infty$  uno puede comprobar explícitamente que la ecuación de movimiento asociada a  $\zeta^a$  es igual a la derivada covariante exterior de la ecuación asociada a  $e^a$ .

### 7.3.2. Cargas conservadas para la acción de Lovelock

En la sección anterior calculamos las ecuaciones de movimiento para la acción de Lovelock realizada no linealmente en  $d$  dimensiones. En esta sección mostraremos las corrientes y las cargas conservadas asociadas, vía el Teorema de Noether (ver Apéndice H), con la invariancia de la acción bajo difeomorfismos, rotaciones locales de Lorentz, y boosts de AdS. La definición de las cargas conservadas en Relatividad General tiene una larga historia; el enfoque que presentamos aquí es el de las refs. [1] y [2].

Partimos de la acción de Lovelock-Born-Infeld en  $d = 2n$  dimensiones

$$S_{\text{SW}}^{(2n)} = \frac{\kappa}{2n} \int \varepsilon_{a_1 \dots a_{2n}} \mathcal{Z}^{a_1 a_2} \dots \mathcal{Z}^{a_{2n-1} a_{2n}}, \quad (7.59)$$

donde hemos definido [cf. ec. (7.37)]

$$\mathcal{Z}^{ab} \equiv \mathcal{R}^{ab} + \frac{1}{\ell^2} V^a V^b, \quad (7.60)$$

$$\mathcal{R}^{ab} \equiv dW^{ab} + W_c^a W^{cb}. \quad (7.61)$$

El cambio de esta acción bajo variaciones arbitrarias  $\delta V^a$  y  $\delta W^{ab}$  en los campos no lineales  $V^a$  y  $W^{ab}$  puede escribirse como

$$\delta S = \int \left[ \frac{\kappa}{\ell^2} \delta V^a \mathcal{F}_a + \frac{\kappa}{\ell^2} (n-1) \delta W^{ab} \mathcal{F}_{ab} + d\Theta \right],$$

donde hemos puesto

$$\mathcal{F}_a \equiv \varepsilon_{aa_2 \dots a_{2n}} \mathcal{Z}^{a_2 a_3} \dots \mathcal{Z}^{a_{2n-2} a_{2n-1}} V^{a_{2n}}, \quad (7.62)$$

$$\mathcal{F}_{ab} \equiv \varepsilon_{aba_3 \dots a_{2n}} \mathcal{Z}^{a_3 a_4} \dots \mathcal{Z}^{a_{2n-3} a_{2n-2}} \mathcal{T}^{a_{2n-1}} V^{a_{2n}}, \quad (7.63)$$

$$\Theta \equiv \frac{\kappa}{2} \varepsilon_{a_1 \dots a_{2n}} \delta W^{a_1 a_2} \mathcal{Z}^{a_3 a_4} \dots \mathcal{Z}^{a_{2n-1} a_{2n}}. \quad (7.64)$$

La corriente conservada asociada a la invariancia bajo difeomorfismos de la acción (7.59) está dada por (ver Apéndice H)

$$\star J_{\text{dif}} = -\Theta - I_\xi L, \quad (7.65)$$

donde  $\xi = \xi^\mu \partial_\mu$  es el campo vectorial que genera el difeomorfismo y  $\star$  es el dual de Hodge<sup>4</sup>. En esta fórmula se entiende que hemos reemplazado en  $\Theta$  la variación de  $W^{ab}$  correspondiente a un difeomorfismo, es decir,  $\delta W^{ab} = -\mathcal{L}_\xi W^{ab}$ . Explícitamente,

$$\star J_{\text{dif}} = \frac{\kappa}{2} \varepsilon_{a_1 \dots a_{2n}} \mathcal{L}_\xi W^{a_1 a_2} \mathcal{Z}^{a_3 a_4} \dots \mathcal{Z}^{a_{2n-1} a_{2n}} - \frac{\kappa}{2n} \varepsilon_{a_1 \dots a_{2n}} I_\xi (\mathcal{Z}^{a_1 a_2} \dots \mathcal{Z}^{a_{2n-1} a_{2n}}). \quad (7.66)$$

Usando la identidad

$$\mathcal{L}_\xi W^{ab} = D(I_\xi W^{ab}) + I_\xi \mathcal{R}^{ab} \quad (7.67)$$

y la regla de Leibniz (2.36) para  $I_\xi$ , es posible escribir  $\star J_{\text{dif}}$  en la forma

$$\star J_{\text{dif}} = d(I_\xi W^{ab} \mathcal{T}_{ab}) - \frac{\kappa}{\ell^2} (n-1) (I_\xi W^{ab}) \mathcal{F}_{ab} - \frac{\kappa}{\ell^2} \xi^a \mathcal{F}_a, \quad (7.68)$$

donde hemos definido

$$\mathcal{T}_{ab} \equiv \frac{\kappa}{2} \varepsilon_{aba_3 a_4 \dots a_{2n}} \mathcal{Z}^{a_3 a_4} \dots \mathcal{Z}^{a_{2n-1} a_{2n}}. \quad (7.69)$$

Esto significa que, *on-shell* (i.e., cuando  $\mathcal{F}_a = 0$ ,  $\mathcal{F}_{ab} = 0$ ), la corriente asociada a la invariancia bajo difeomorfismos de la acción (7.59) es

$$\star J_{\text{dif}} = d(I_\xi W^{ab} \mathcal{T}_{ab}). \quad (7.70)$$

---

<sup>4</sup>Las corrientes conservadas que surgen de la aplicación del Teorema de Noether son  $(d-1)$ -formas. Dado que parece más simple tratar con una 1-forma en vez de una  $(d-1)$ -forma, estas corrientes son escritas como el dual de Hodge de una 1-forma  $J$ . Sin embargo, esto no es en modo alguno necesario.

Cuando el espacio-tiempo  $M$  tiene topología  $M = \mathbb{R} \times \Sigma$ , donde  $\Sigma$  es una sección espacial, podemos integrar  $\star J_{\text{dif}}$  sobre  $\Sigma$  para obtener la carga conservada  $Q_{\text{dif}}$ . Como  $\star J_{\text{dif}}$  es una derivada total, el Teorema de Stokes permite escribir  $Q_{\text{dif}}$  como una integral sobre el borde  $\partial\Sigma$  de la sección espacial  $\Sigma$ :

$$Q_{\text{dif}} = \int_{\partial\Sigma} I_{\xi} W^{ab} \mathcal{T}_{ab}. \quad (7.71)$$

Cuando  $\xi$  es un vector de Killing tipo tiempo ( $\partial/\partial t$ ) o rotacional ( $\partial/\partial\varphi$ ), la ec. (7.71) provee una definición de la masa y el momento angular, respectivamente.

Las corrientes conservadas asociadas a la invariancia de (7.59) bajo rotaciones locales de Lorentz y boosts de AdS pueden ser calculadas simultáneamente usando las expresiones [cf. ecs. (7.40) y (7.41)]

$$\delta V^a = h^a_b V^b, \quad \delta W^{ab} = -D_W h^{ab}, \quad (7.72)$$

donde, para transformaciones de Lorentz, los  $h^{ab}$  son los parámetros de la transformación y, para boosts de AdS con parámetro  $\epsilon^a$ , los  $h^{ab}$  están dados por [ver ec. (7.46)]

$$h^{ab} = \frac{1}{\ell^2} \frac{\cosh z - 1}{z \sinh z} (\epsilon^a \zeta^b - \epsilon^b \zeta^a). \quad (7.73)$$

En ambos casos la corriente conservada puede escribirse como

$$\star J = \frac{\kappa}{2} \varepsilon_{a_1 \dots a_{2n}} (D_W h^{a_1 a_2}) \mathcal{Z}^{a_3 a_4} \dots \mathcal{Z}^{a_{2n-1} a_{2n}}. \quad (7.74)$$

*on-shell*, esta corriente no es más que

$$\star J = \frac{\kappa}{2} d(\varepsilon_{a_1 \dots a_{2n}} h^{a_1 a_2} \mathcal{Z}^{a_3 a_4} \dots \mathcal{Z}^{a_{2n-1} a_{2n}}), \quad (7.75)$$

lo cual nos conduce a la carga conservada

$$Q = \int_{\partial\Sigma} h^{ab} \mathcal{T}_{ab}. \quad (7.76)$$

Por lo tanto, las cargas conservadas asociadas a la invariancia de la acción (7.59) bajo rotaciones locales de Lorentz y bajo boosts de AdS son

$$Q_{\text{Lorentz}} = \int_{\partial\Sigma} h^{ab} \mathcal{T}_{ab}, \quad (7.77)$$

$$Q_{\text{AdS}} = \frac{2}{\ell^2} \int_{\partial\Sigma} \frac{\cosh z - 1}{z \sinh z} \epsilon_a \mathcal{T}^a_b \zeta^b. \quad (7.78)$$

En el gauge físico  $\zeta^a = 0$ , las cargas  $Q_{\text{dif}}$  y  $Q_{\text{Lorentz}}$  se reducen a aquellas obtenidas en la ref. [2]. En cambio, esta elección de gauge hace que la carga conservada asociada a la invariancia de (7.59) bajo boosts de AdS  $Q_{\text{AdS}}$  se anule, en completa concordancia con el rompimiento de esta simetría cuando  $\zeta^a = 0$ .

# Capítulo 8

## La Reducción Dimensional

La experiencia nos muestra que, al menos macroscópicamente, el espacio-tiempo tiene cuatro dimensiones (tres espaciales y una temporal). Sin embargo, esta observación no elimina la posibilidad de que, en escalas mucho menores a las accesibles por nuestros instrumentos, esto no sea ya más así. La introducción de dimensiones extras es ya una hipótesis usual en la física de altas energías, y muchas teorías dependen de su existencia para ser matemáticamente consistentes [8, 22]. Por supuesto, siempre debemos ser capaces de, a partir de una teoría formulada en una dimensión superior, extraer la información relevante para el mundo macroscópico de cuatro dimensiones. Esto es llevado a cabo a través de un proceso de **reducción dimensional**, en el cual se relacionan cantidades definidas en una dimensión  $d$  con cantidades pertenecientes a la dimensión inferior<sup>1</sup>. Esta identificación es en gran medida arbitraria; en las secciones siguientes mostramos dos clases de reducción dimensional correspondientes a las usadas por Grignani y Nardelli en [13]. Nuestro cálculo, sin embargo, va más allá del de estos autores en tres aspectos: (i) permitimos una reducción dimensional a partir de una dimensión par arbitraria y no sólo de cuatro a tres dimensiones; (ii) utilizamos el lagrangeano de Lovelock-Born-Infeld en  $d = 2n$  en lugar de la acción de Einstein-Hilbert; y (iii) nuestra acción es invariante bajo el grupo de anti-de Sitter, en lugar de serlo sólo del grupo de Poincaré.

En la sección 8.4 se muestra además una tercera alternativa de reducción dimensional, en la cual se asume un tipo de dependencia específica de los campos sobre la coordenada  $x^{2n}$ . La ventaja de esta clase de reducción por sobre las otras radica en el hecho que ella permite obtener la acción de Euler-Chern-Simons en  $d = 2n - 1$  a partir de la acción de Lovelock-Born-Infeld en  $2n$  dimensiones.

---

<sup>1</sup>También existe la posibilidad de realizar un proceso de reducción entre dos dimensiones arbitrarias.

## 8.1. Métodos de Reducción Dimensional

En esta sección examinamos dos de los métodos de reducción dimensional que serán utilizados más adelante. Para distinguir las cantidades de la dimensión superior ( $d = 2n$ ) de aquellas de la dimensión inferior ( $d = 2n - 1$ ) usamos un acento circunflejo sobre las primeras. Además, usamos índices latinos en mayúsculas para denotar el rango  $A = 1, \dots, 2n$ , en tanto que reservamos los índices en letras minúsculas para el rango reducido  $a = 1, \dots, 2n - 1$ . Así,  $\hat{e}^A$  representará el vielbein en  $d = 2n$ , el cual puede descomponerse como  $\hat{e}^A = (\hat{e}^a, \hat{e}^{2n})$ . Los métodos de reducción dimensional nos permiten relacionar  $\hat{e}^a$  y  $\hat{e}^{2n}$  con las cantidades inherentes a  $d = 2n - 1$ , como  $e^a$ ,  $\omega^{ab}$  y  $\zeta^a$ .

Un punto importante es que debemos permitir que las constantes que aparecen en la acción cambien su valor al reducirse la dimensionalidad del espacio-tiempo. Esto significa que, por ejemplo, la constante  $\hat{\kappa}$ , que aparece en la acción para  $d = 2n$ , no tiene por qué coincidir con la constante  $\kappa$  perteneciente a la acción en  $d = 2n - 1$ . Más bien, parte de nuestra tarea será encontrar la relación precisa que existe entre las constantes de la dimensión inferior con las de la dimensión superior.

### 8.1.1. Método I

En este método, las cantidades de  $2n$  dimensiones son identificadas con su homólogo de  $2n - 1$  dimensiones de acuerdo a la tabla siguiente:

$d = 2n$	$d = 2n - 1$
$\hat{e}^a$	$e^a$
$\hat{e}^{2n}$	$dx^{2n}$
$\hat{\omega}^{ab}$	$\omega^{ab}$
$\hat{\omega}^{a,2n}$	0
$\hat{\zeta}^a$	$\zeta^a$
$\hat{\zeta}^{2n}$	0

Este es el método de reducción dimensional más sencillo; consiste en simplemente anular (o reducir a la unidad) las últimas componentes de cada una de las cantidades relevantes.

Aplicando esta receta, las componentes del vielbein y la conexión no lineales  $\hat{V}^A$

y  $\hat{W}^{AB}$  se reducen a

$$\hat{V}^a = T_b^a (\ln \cosh \hat{z}) e^b + T_b^a \left( \ln \frac{\sinh \hat{z}}{\hat{z}} \right) D_\omega \zeta^b, \quad (8.1)$$

$$\hat{V}^{2n} = (\cosh \hat{z}) dx^{2n}, \quad (8.2)$$

$$\hat{W}^{ab} = \omega^{ab} - \frac{1}{\hat{\ell}^2} \left[ \left( \frac{\sinh \hat{z}}{\hat{z}} \right) e^c + \left( \frac{\cosh \hat{z} - 1}{\hat{z}^2} \right) D_\omega \zeta^c \right] (\zeta^a \delta_c^b - \zeta^b \delta_c^a), \quad (8.3)$$

$$\hat{W}^{a,2n} = -\frac{1}{\hat{\ell}^2} \left( \frac{\sinh \hat{z}}{\hat{z}} \right) dx^{2n} \zeta^a, \quad (8.4)$$

donde  $\hat{z} = (\ell/\hat{\ell}) z$ . La falta de coincidencia entre  $\hat{z}$  y  $z$  es lo que nos aparta de escribir simplemente  $\hat{V}^a = V^a$  y  $\hat{W}^{ab} = W^{ab}$ , como sería el caso si  $\hat{z} = z$ . Con estas identificaciones para la conexión, la curvatura  $\hat{\mathcal{R}}^{AB}$  se escinde en

$$\hat{\mathcal{R}}^{ab} = d\hat{W}^{ab} + \hat{W}_c^a \hat{W}^{cb}, \quad (8.5)$$

$$\hat{\mathcal{R}}^{a,2n} = -\frac{1}{\hat{\ell}^2} D_{\hat{W}} \left[ \left( \frac{\sinh \hat{z}}{\hat{z}} \right) \zeta^a \right] dx^{2n}, \quad (8.6)$$

donde  $D_{\hat{W}}$  representa la derivada covariante con respecto a la conexión  $\hat{W}^{ab}$ .

### 8.1.2. Método II

En este método, las cantidades de  $2n$  dimensiones son identificadas con su homólogo de  $2n - 1$  dimensiones de acuerdo a la tabla siguiente:

$d = 2n$	$d = 2n - 1$
$\hat{e}^a$	0
$\hat{e}^{2n}$	$dx^{2n}$
$\hat{\omega}^{ab}$	$\omega^{ab}$
$\hat{\omega}^{a,2n}$	$\frac{1}{\gamma} V^a$
$\hat{\zeta}^a$	0
$\hat{\zeta}^{2n}$	$\gamma$

Aquí  $\gamma$  es una constante con dimensiones de longitud que puede ser ajustada convenientemente. En abierto contraste con el Método I, en esta ocasión las últimas componentes de los campos son mantenidas distintas de cero, en tanto que las primeras componentes tanto del vielbein como de la coordenada de AdS son anuladas.

Aplicando esta receta, las componentes del vielbein y la conexión no lineales  $\hat{V}^A$  y  $\hat{W}^{AB}$  se reducen a

$$\hat{V}^a = \left( \frac{\sinh \hat{z}}{\hat{z}} \right) V^a, \quad (8.7)$$

$$\hat{V}^{2n} = dx^{2n}, \quad (8.8)$$

$$\hat{W}^{ab} = \omega^{ab}, \quad (8.9)$$

$$\hat{W}^{a,2n} = \frac{1}{\gamma} (\cosh \hat{z}) V^a. \quad (8.10)$$

Vemos que esta identificación resulta en una mezcla del vielbein y la conexión: parte de las propiedades afines de la dimensión inferior son determinadas por las propiedades métricas de la dimensión superior. Habiendo escrito de esta manera la conexión, encontramos que la curvatura  $\hat{\mathcal{R}}^{AB}$  se descompone en

$$\hat{\mathcal{R}}^{ab} = R^{ab} - \frac{1}{\gamma^2} (\cosh^2 \hat{z}) V^a V^b, \quad (8.11)$$

$$\hat{\mathcal{R}}^{a,2n} = \frac{1}{\gamma} (\cosh \hat{z}) D_\omega V^a, \quad (8.12)$$

donde  $\hat{z} = \gamma/\hat{\ell}$  y  $D_\omega$  representa la derivada covariante en la conexión  $\omega^{ab}$ . Notemos que este método de reducción dimensional tiene la notable propiedad de producir un  $\hat{z}$  constante.

## 8.2. De cuatro a tres dimensiones

Como primer paso llevamos a cabo la reducción dimensional de la acción de Lovelock-Born-Infeld en cuatro dimensiones realizada no linealmente

$$S_{\text{SW}}^{(4)} = \frac{\hat{\kappa}}{4} \int \varepsilon_{ABCD} \left( \hat{\mathcal{R}}^{AB} + \frac{1}{\hat{\ell}^2} \hat{V}^A \hat{V}^B \right) \left( \hat{\mathcal{R}}^{CD} + \frac{1}{\hat{\ell}^2} \hat{V}^C \hat{V}^D \right). \quad (8.13)$$

Usando la antisimetría del símbolo de Levi-Civita podemos reescribir esta acción en la forma

$$S_{\text{BI}}^{(4)} = \hat{\kappa} \int \varepsilon_{abc} \left( \hat{\mathcal{R}}^{ab} + \frac{1}{\hat{\ell}^2} \hat{V}^a \hat{V}^b \right) \left( \hat{\mathcal{R}}^{c4} + \frac{1}{\hat{\ell}^2} \hat{V}^c \hat{V}^4 \right), \quad (8.14)$$

donde  $\varepsilon_{abc} = \varepsilon_{abc4}$ . Esta versión de la acción se presta para realizar la reducción dimensional de acuerdo a los métodos explicados en la sección anterior.

### 8.2.1. Método I

Aplicando el Método I de reducción dimensional a la acción (8.14) nos vemos conducidos a

$$S_{\text{BI}}^{(4)} = \frac{\hat{\kappa}}{\hat{\ell}^2} \int \varepsilon_{abc} \left( \hat{\mathcal{R}}^{ab} + \frac{1}{\hat{\ell}^2} \hat{V}^a \hat{V}^b \right) \left\{ (\cosh \hat{z}) \hat{V}^c - D_{\hat{W}} \left[ \left( \frac{\sinh \hat{z}}{\hat{z}} \right) \zeta^c \right] \right\} dx^4. \quad (8.15)$$

Es en este punto donde tiene lugar la reducción dimensional propiamente tal. Primero exigimos que la dirección  $x^4$  sea compacta, es decir, que la integral sobre ella tenga un valor finito. Con este efecto escogemos<sup>2</sup>

$$\int dx^4 = \hat{\ell}, \quad (8.16)$$

donde la integración es llevada a cabo en todo el rango de validez de la coordenada  $x^4$ . Asumimos, por simplicidad, que todos los campos son independientes de esta coordenada. Al realizar la integración sobre  $x^4$  en (8.15) obtenemos

$$S_{\text{red}}^{(3)} = \frac{\hat{\kappa}}{\hat{\ell}} \int \varepsilon_{abc} \left( \hat{\mathcal{R}}^{ab} + \frac{1}{\hat{\ell}^2} \hat{V}^a \hat{V}^b \right) \left\{ (\cosh \hat{z}) \hat{V}^c - D_{\hat{W}} \left[ \left( \frac{\sinh \hat{z}}{\hat{z}} \right) \zeta^c \right] \right\}. \quad (8.17)$$

La acción (8.17) no es una acción de Lovelock; el último término, una vez integrado por partes, conduce a lagrangeanos torsionales. Estos lagrangeanos no son en modo alguno absurdos; de hecho, se han construido teorías de supergravedad en dimensiones impares cuyo sector puramente gravitacional consiste en una acción que involucra explícitamente la torsión [30].

Cuando escogemos el gauge físico  $\zeta^a = 0$  los términos torsionales en (8.17) desaparecen, dejándonos con

$$S_{\text{red}}^{(3)} = \frac{\hat{\kappa}}{\hat{\ell}} \int \varepsilon_{abc} \left( R^{ab} + \frac{1}{\hat{\ell}^2} e^a e^b \right) e^c. \quad (8.18)$$

Lo que resta por hacer es especificar el modo en que las constantes asociadas a la acción en cuatro dimensiones se relacionan con las de tres. Escogiendo

$$\ell = \frac{\hat{\ell}}{\sqrt{3}}, \quad (8.19)$$

$$\kappa = \frac{\hat{\kappa}}{\sqrt{3}}, \quad (8.20)$$

---

<sup>2</sup>La arbitrariedad en la elección de esta compactificación implica que la acción reducida puede multiplicarse por una constante adimensional escogida a voluntad.

la acción (8.18) llega a ser la acción de Euler-Chern-Simons en tres dimensiones:

$$S_{\text{red}}^{(3)} = \frac{\kappa}{\ell} \int \varepsilon_{abc} \left( R^{ab} + \frac{1}{3\ell^2} e^a e^b \right) e^c. \quad (8.21)$$

### 8.2.2. Método II

Ahora aplicamos los resultados de la sección 8.1.2 a la acción de Lovelock-Born-Infeld realizada no linealmente (8.14) para obtener

$$S_{\text{BI}}^{(4)} = \frac{\hat{\kappa}}{\hat{\ell}} \left( \frac{\sinh \hat{z}}{\hat{z}} \right) \int \varepsilon_{abc} \left( R^{ab} - \frac{1}{\gamma^2} V^a V^b \right) V^c \frac{dx^4}{\hat{\ell}}. \quad (8.22)$$

Notemos que el término  $(\sinh \hat{z}/\hat{z})$  sale fuera de la integral, ya que es igual a una constante (cuando usamos el Método II). En seguida compactificamos la dirección  $x^4$  de acuerdo a

$$\int dx^4 = \hat{\ell},$$

lo cual nos conduce a la acción reducida

$$S_{\text{red}}^{(3)} = \frac{\hat{\kappa}}{\hat{\ell}} \left( \frac{\sinh \hat{z}}{\hat{z}} \right) \int \varepsilon_{abc} \left( R^{ab} - \frac{1}{\gamma^2} V^a V^b \right) V^c. \quad (8.23)$$

Esta acción contiene el vielbein no lineal  $V^a$  y la curvatura  $R^{ab}$  asociada a la conexión  $\omega^{ab}$ ; esta combinación es un resultado de las particulares elecciones hechas en el método de reducción dimensional. Escogiendo el gauge físico  $\zeta^a = 0$ , nos vemos conducidos a

$$S_{\text{red}}^{(3)} = \frac{\hat{\kappa}}{\hat{\ell}} \left( \frac{\sinh \hat{z}}{\hat{z}} \right) \int \varepsilon_{abc} \left( R^{ab} - \frac{1}{\gamma^2} e^a e^b \right) e^c. \quad (8.24)$$

En este punto resulta claro que el Método II de reducción dimensional nos conduce naturalmente a una acción en tres dimensiones con una constante cosmológica *positiva*,  $\Lambda = 3/\gamma^2$ . El reemplazo  $\gamma = ig$ , con  $g > 0$ , permite la introducción de una constante cosmológica *negativa*.

El último paso es precisar la reducción de las constantes de la acción. La elección

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{3}} \sinh \left( \frac{\gamma}{\hat{\ell}} \right) \hat{\kappa}, \quad (8.25)$$

$$\ell = \frac{1}{\sqrt{3}} \gamma, \quad (8.26)$$

permite hacer que  $S_{\text{red}}^{(3)}$  llegue a ser la acción de Euler-Chern-Simons en tres dimensiones

$$S_{\text{red}}^{(3)} = \frac{\kappa}{\ell} \int \varepsilon_{abc} \left( R^{ab} - \frac{1}{3\ell^2} e^a e^b \right) e^c. \quad (8.27)$$

Por lo tanto, ambos métodos de Reducción Dimensional conducen, mediante una elección apropiada de las constantes de la acción, a la teoría de gravitación Chern-Simons en tres dimensiones. La acción reducida tiene la particularidad de ser invariante bajo transformaciones del grupo de anti-de Sitter  $SO(2, 2)$ , cuando usamos el Método I, o de de Sitter  $SO(3, 1)$ , cuando usamos el Método II.

### 8.3. De $d = 2n$ a $d = 2n - 1$

En esta sección mostramos la reducción de la acción de Lovelock-Born-Infeld en  $2n$  dimensiones

$$S_{\text{SW}}^{(2n)} = \frac{\hat{\kappa}}{2n} \int \varepsilon_{A_1 \dots A_{2n}} \hat{\mathcal{Z}}^{A_1 A_2} \dots \hat{\mathcal{Z}}^{A_{2n-1} A_{2n}}, \quad (8.28)$$

donde hemos puesto [cf. ec. (7.37)]

$$\hat{\mathcal{Z}}^{AB} \equiv \hat{\mathcal{R}}^{AB} + \frac{1}{\hat{\ell}^2} \hat{V}^A \hat{V}^B, \quad (8.29)$$

$$\hat{\mathcal{R}}^{AB} \equiv d\hat{W}^{AB} + \hat{W}_C^A \hat{W}^{CB}. \quad (8.30)$$

Usando la antisimetría del símbolo de Levi-Civita, podemos reescribir la acción (8.28) en la forma

$$S_{\text{SW}}^{(2n)} = \hat{\kappa} \int \varepsilon_{a_1 \dots a_{2n-1}} \hat{\mathcal{Z}}^{a_1 a_2} \dots \hat{\mathcal{Z}}^{a_{2n-3} a_{2n-2}} \hat{\mathcal{Z}}^{a_{2n-1}, 2n}. \quad (8.31)$$

Lo que nos resta por hacer es identificar las cantidades de  $2n$  dimensiones con cantidades correspondientes de  $2n - 1$  dimensiones. Esta identificación será llevada a cabo siguiendo los dos métodos descritos más arriba.

#### 8.3.1. Método I

Aplicando el Método I de reducción dimensional a la acción (8.28), la siguiente forma es obtenida:

$$S_{\text{SW}}^{(2n)} = \frac{\hat{\kappa}}{\hat{\ell}^2} \int \varepsilon_{a_1 \dots a_{2n-1}} \hat{\mathcal{Z}}^{a_1 a_2} \dots \hat{\mathcal{Z}}^{a_{2n-3} a_{2n-2}} \left\{ (\cosh \hat{z}) \hat{V}^a + \right. \\ \left. - D_{\hat{W}} \left[ \left( \frac{\sinh \hat{z}}{\hat{z}} \right) \zeta^{a_{2n-1}} \right] \right\} dx^{2n}. \quad (8.32)$$

Al igual que en el caso tetradimensional, esta acción no es una acción de Lovelock; la integración por partes del último término produce, aparte de un término de borde, contribuciones torsionales a la acción. Sin embargo, al escoger el gauge físico  $\zeta^a = 0$  los lagrangeanos torsionales desaparecen y nos quedamos con la acción

$$S_{\text{SW}}^{(2n)} = \frac{\hat{\kappa}}{\hat{\ell}^2} \int \varepsilon_{a_1 \dots a_{2n-1}} \left( R^{a_1 a_2} + \frac{1}{\hat{\ell}^2} e^{a_1} e^{a_2} \right) \dots \times \\ \times \left( R^{a_{2n-3} a_{2n-2}} + \frac{1}{\hat{\ell}^2} e^{a_{2n-3}} e^{a_{2n-2}} \right) e^a dx^{2n}. \quad (8.33)$$

Cuando compactificamos la dirección  $x^{2n}$  a una longitud  $\hat{\ell}$ , este procedimiento nos conduce a la acción reducida

$$S_{\text{red}}^{(2n-1)} = \frac{\hat{\kappa}}{\hat{\ell}} \int \varepsilon_{a_1 \dots a_{2n-1}} \left( R^{a_1 a_2} + \frac{1}{\hat{\ell}^2} e^{a_1} e^{a_2} \right) \dots \times \\ \times \left( R^{a_{2n-3} a_{2n-2}} + \frac{1}{\hat{\ell}^2} e^{a_{2n-3}} e^{a_{2n-2}} \right) e^{a_{2n-1}}. \quad (8.34)$$

Esta es una acción de Lovelock, puesto que sólo involucra la curvatura  $R^{ab}$  y el vielbein  $e^a$ . Para verlo más claramente, desarrollamos el producto de curvaturas concirculares y escribimos

$$S_{\text{red}}^{(2n-1)} = \hat{\kappa} \int \sum_{p=0}^{n-1} \hat{\ell}^{-(2n-1-2p)} \binom{n-1}{p} \varepsilon_{a_1 \dots a_{2n-1}} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2p-1} a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \dots e^{a_{2n-1}}.$$

Esto es *distinto* de la acción de Euler-Chern-Simons en  $2n - 1$  dimensiones

$$S_{\text{CS}}^{(2n-1)} = \kappa \int \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\ell^{-(2n-1-2p)}}{2n-1-2p} \binom{n-1}{p} \varepsilon_{a_1 \dots a_{2n-1}} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2p-1} a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \dots e^{a_{2n-1}},$$

y no hay transformación alguna sobre  $\kappa$  y  $\ell$  que pueda llevar uno en el otro.

### 8.3.2. Método II

La aplicación de los resultados del Método II de Reducción Dimensional a la acción (8.28) permite escribirla en la forma

$$S_{\text{SW}}^{(2n)} = \frac{\hat{\kappa}}{\hat{\ell}^2} \left( \frac{\sinh \hat{z}}{\hat{z}} \right) \int \varepsilon_{a_1 \dots a_{2n-1}} \left( R^{a_1 a_2} - \frac{1}{\gamma^2} V^{a_1} V^{a_2} \right) \dots \times \\ \times \left( R^{a_{2n-3} a_{2n-2}} - \frac{1}{\gamma^2} V^{a_{2n-3}} V^{a_{2n-2}} \right) V^{a_{2n-1}} dx^{2n}. \quad (8.35)$$

Tras compactificar la dirección  $x^{2n}$  a una longitud  $\hat{\ell}$  hallamos la acción reducida

$$S_{\text{red}}^{(2n-1)} = \frac{\hat{\kappa}}{\hat{\ell}} \left( \frac{\sinh \hat{z}}{\hat{z}} \right) \int \varepsilon_{a_1 \dots a_{2n-1}} \left( R^{a_1 a_2} - \frac{1}{\gamma^2} V^{a_1} V^{a_2} \right) \dots \times \\ \times \left( R^{a_{2n-3} a_{2n-2}} - \frac{1}{\gamma^2} V^{a_{2n-3}} V^{a_{2n-2}} \right) V^{a_{2n-1}}. \quad (8.36)$$

Al igual que en el caso cuatridimensional, la adopción de una constante cosmológica negativa requiere la elección  $\gamma = ig$ , donde  $g$  es una constante real positiva. Así,

$$S_{\text{red}}^{(2n-1)} = \frac{\hat{\kappa}}{\hat{\ell}} \left( \frac{\sinh \hat{z}}{\hat{z}} \right) \int \varepsilon_{a_1 \dots a_{2n-1}} \left( R^{a_1 a_2} + \frac{1}{g^2} V^{a_1} V^{a_2} \right) \dots \times \\ \times \left( R^{a_{2n-3} a_{2n-2}} + \frac{1}{g^2} V^{a_{2n-3}} V^{a_{2n-2}} \right) V^{a_{2n-1}}. \quad (8.37)$$

En el gauge físico  $\zeta^a = 0$  el vielbein no lineal  $V^a$  se reduce al vielbein  $e^a$  y  $S_{\text{red}}^{(2n-1)}$  resulta ser una acción de Lovelock:

$$S_{\text{red}}^{(2n-1)} = \frac{\hat{\kappa}}{\hat{\ell}} \left( \frac{\sinh \hat{z}}{\hat{z}} \right) \int \varepsilon_{a_1 \dots a_{2n-1}} \left( R^{a_1 a_2} + \frac{1}{g^2} e^{a_1} e^{a_2} \right) \dots \times \\ \times \left( R^{a_{2n-3} a_{2n-2}} + \frac{1}{g^2} e^{a_{2n-3}} e^{a_{2n-2}} \right) e^{a_{2n-1}}. \quad (8.38)$$

Resolviendo el producto de curvaturas concirculares podemos poner esta acción reducida de un modo más sugerente:

$$S_{\text{red}}^{(2n-1)} = \frac{g\hat{\kappa}}{\hat{\ell}} \left( \frac{\sinh \hat{z}}{\hat{z}} \right) \int \sum_{p=0}^{n-1} g^{-(2n-1-2p)} \binom{n-1}{p} \varepsilon_{a_1 \dots a_{2n-1}} R^{a_1 a_2} \dots \times \\ \times R^{a_{2p-1} a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \dots e^{a_{2n-1}}. \quad (8.39)$$

Esta acción es también claramente distinta de la acción de Euler-Chern-Simons en dimensiones impares, sin importar cuales sean las reducciones aplicadas a las constantes  $\hat{\kappa}$  y  $\hat{\ell}$ . Es claro, sin embargo, que  $\ell$  debe ser considerada igual a  $g$ , lo cual aclara el rol de esta constante.

## 8.4. Tercera Alternativa de Reducción Dimensional

La acción de Lovelock-Born-Infeld en dimensiones pares,

$$S_{\text{BI}}^{(2n)} = \frac{\hat{\kappa}}{2n} \int_{M_{2n}} \sum_{p=0}^n \hat{\ell}^{-(2n-2p)} \binom{n}{p} \varepsilon_{A_1 \dots A_{2n}} \hat{\mathcal{R}}^{A_1 A_2} \dots \hat{\mathcal{R}}^{A_{2p-1} A_{2p}} \hat{V}^{A_{2p+1}} \dots \hat{V}^{A_{2n}}, \quad (8.40)$$

puede también ser descompuesta de acuerdo a

$$S_{\text{BI}}^{(2n)} = \hat{\kappa} \int_{M_{2n}} \sum_{p=0}^{n-1} \hat{\ell}^{-(2n-1-2p)} \binom{n-1}{p} \varepsilon_{a_1 \dots a_{2n-1}} \left( \frac{1}{\hat{\ell}} \hat{\mathcal{R}}^{a_1 a_2} \dots \hat{\mathcal{R}}^{a_{2p-1} a_{2p}} \times \right. \\ \left. \times \hat{V}^{a_{2p+1}} \dots \hat{V}^{a_{2n-1}} \hat{V}^{2n} + \hat{\ell} \hat{\mathcal{R}}^{a_1 a_2} \dots \hat{\mathcal{R}}^{a_{2p-1} a_{2p}} \hat{\mathcal{R}}^{a_{2p+1}, 2n} \hat{V}^{a_{2p+2}} \dots \hat{V}^{a_{2n-1}} \right). \quad (8.41)$$

Una simple inspección en (8.41) revela que el primer término contiene la acción para gravedad en  $2n - 1$  dimensiones; en cambio, el segundo término da origen, en general, a lagrangeanos torsionales. Concentramos nuestra atención en

$$S_{\text{g}}^{(2n)} = \frac{\hat{\kappa}}{\hat{\ell}} \int_{M_{2n}} \sum_{p=0}^{n-1} \hat{\ell}^{-(2n-1-2p)} \binom{n-1}{p} \varepsilon_{a_1 \dots a_{2n-1}} \hat{\mathcal{R}}^{a_1 a_2} \dots \hat{\mathcal{R}}^{a_{2p-1} a_{2p}} \times \\ \times \hat{V}^{a_{2p+1}} \dots \hat{V}^{a_{2n-1}} \hat{V}^{2n}. \quad (8.42)$$

Hacemos ahora la hipótesis de que la dependencia del vielbein no lineal  $\hat{V}^A$  sobre la coordenada  $x^{2n}$  viene dada por

$$\hat{V}^a = e^{kx^{2n}} \hat{V}_0^a, \quad (8.43)$$

$$\hat{V}^{2n} = dx^{2n}, \quad (8.44)$$

donde  $k$  es una constante positiva con dimensiones de inverso de longitud y  $\hat{V}_0^a$  es independiente de  $x^{2n}$ . Asumimos también que la conexión no lineal  $\hat{W}^{AB}$ , y consecuentemente la curvatura, son independientes de  $x^{2n}$ . La parametrización de esta coordenada es escogida de modo que su rango de validez sea  $-\infty < x^{2n} \leq 0$ , correspondiendo  $x^{2n} = 0$  al *borde*  $M_{2n-1} \equiv \partial M_{2n}$  de  $M_{2n}$ . Realizando explícitamente la

integración sobre  $x^{2n}$ , la acción (8.42) toma la forma

$$S_g^{(2n)} = \frac{\hat{\kappa}}{k\hat{\ell}} \int_{M_{2n-1}} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\hat{\ell}^{-(2n-1-2p)}}{(2n-1-2p)} \binom{n-1}{p} \varepsilon_{a_1 \dots a_{2n-1}} \hat{\mathcal{R}}^{a_1 a_2} \times \\ \times \dots \hat{\mathcal{R}}^{a_{2p-1} a_{2p}} \hat{V}_0^{a_{2p+1}} \dots \hat{V}_0^{a_{2n-1}}. \quad (8.45)$$

Las simples identificaciones  $\hat{V}_0^a = V^a$  y  $\hat{W}^{ab} = W^{ab}$ , más la reducción de constantes

$$\kappa = \frac{\hat{\kappa}}{k\hat{\ell}}, \quad (8.46)$$

$$\ell = \hat{\ell}, \quad (8.47)$$

permiten reproducir la acción de Euler-Chern-Simons en  $2n-1$  dimensiones,

$$S_{\text{red}}^{(2n-1)} = \kappa \int_{M_{2n-1}} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\ell^{-(2n-1-2p)}}{(2n-1-2p)} \binom{n-1}{p} \varepsilon_{a_1 \dots a_{2n-1}} \mathcal{R}^{a_1 a_2} \times \\ \times \dots \mathcal{R}^{a_{2p-1} a_{2p}} V^{a_{2p+1}} \dots V^{a_{2n-1}}. \quad (8.48)$$

Es interesante notar que esta acción es obtenida haciendo sólo una hipótesis fuerte, que tiene que ver con la dependencia del vielbein en la coordenada  $x^{2n}$ . Las identificaciones mismas que completan la definición del proceso de reducción no son tan relevantes en este caso particular. Por ejemplo, no es necesario escoger el gauge físico ni hacer una elección particularmente especial en la reducción de las constantes para hallar la acción (8.48).

## 8.5. Análisis de la Reducción Dimensional

Hemos presentado cuatro versiones del proceso de Reducción Dimensional, usando dos métodos distintos y analizando primero la reducción de cuatro a tres dimensiones y luego el caso general. En esta sección analizamos las diferencias entre los métodos utilizados y aquellas que surgen de la dimensionalidad.

En primer lugar, podemos notar que ambos métodos de reducción dimensional conducen a la acción de Euler-Chern-Simons cuando la reducción es llevada a cabo de cuatro a tres dimensiones, pero esto deja de ser cierto, en general, para dimensiones mayores. La razón es simplemente que el número de constantes que necesitan ser ajustadas en la acción en  $2n$  dimensiones para obtener la acción de Euler-Chern-Simons es igual a  $n$ , en general. Esto contrasta con las sólo dos constantes libres que

contiene la acción de Lovelock-Born-Infeld en dimensiones pares,  $\kappa$  y  $\ell$ . Sin embargo, en el caso tetradimensional estas dos constantes son exactamente suficientes para realizar el ajuste necesario ( $n = 2$ ), y es ésta la razón del éxito de las reducciones dimensionales en este caso. En dimensiones superiores la teoría obtenida es de todos modos una de la clase de Lovelock, pero sus coeficientes no coinciden con los de la teoría de Chern-Simons. Esto significa, por ejemplo, que estas teorías tienen la potencialidad de tener ecuaciones de movimiento que dejen indeterminadas algunas componentes de la torsión o la curvatura [31].

Otro modo de visualizar el motivo para la no obtención de los coeficientes de Chern-Simons en dimensiones impares proviene de notar que, tanto en dimensiones pares como impares, los coeficientes pueden ser escritos unívocamente como<sup>3</sup>

$$\alpha_p^{(d)} = \kappa \frac{\ell^{-(d-2p)}}{d-2p} \binom{n-1}{p}, \quad \text{con } n = \left\lfloor \frac{d+1}{2} \right\rfloor. \quad (8.49)$$

Esta forma se desdobra en dimensiones pares e impares como

$$\alpha_p^{(2n-1)} = \kappa \frac{\ell^{-(2n-1-2p)}}{2n-1-2p} \binom{n-1}{p}, \quad (8.50)$$

$$\alpha_p^{(2n)} = \frac{\kappa}{2n} \ell^{-(2n-2p)} \binom{n}{p}. \quad (8.51)$$

Sin embargo, el coeficiente binomial que aparece en ambos casos depende directamente de  $n$ , y no de la dimensionalidad del espacio-tiempo. La tabla siguiente sirve para ilustrar la situación:

$d$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$n$	2	2	3	3	4	4	5	5	6

(8.52)

De este modo, cuando pasamos de una dimensión par a la dimensión impar inmediatamente inferior,  $n$  mantiene su valor constante. Esta situación provoca que los coeficientes no se reduzcan del modo necesario para producir una teoría de Chern-Simons en la dimensión impar. En particular, esto significa que la reducción dimensional de la acción de Euler-Chern-Simons en  $d = 2n - 1$  a la dimensión par inmediatamente inferior debería producir una acción de Lovelock-Born-Infeld en  $d = 2n - 2$ .

La tercera alternativa de reducción dimensional que hemos presentado permite obtener la acción de Euler-Chern-Simons en dimensiones impares a partir de la

---

<sup>3</sup>Aquí se ha escogido una constante cosmológica negativa. Cuando  $\Lambda > 0$ , cada coeficiente  $\alpha_p^{(d)}$  debe multiplicarse por un factor  $(-1)^p$ .

acción de Lovelock-Born-Infeld en la dimensión par inmediatamente superior. Esta construcción se basa en la hipótesis de que la dependencia del vielbein sobre la coordenada  $x^{2n}$  es del tipo exponencial. Claramente, el tipo de dependencia asumido es crucial para determinar las teorías que se obtendrán en el proceso de reducción dimensional. La reducción más general de la acción de Lovelock-Born-Infeld, en la cual la dependencia de los campos sobre  $x^{2n}$  es expresada (por ejemplo) mediante una serie de Fourier, permanece como un problema abierto.



# Apéndice A

## Notación y Convenciones

Usamos la signatura  $(-, +, \dots, +)$  para la métrica del espacio-tiempo. La derivada covariante actúa según

$$D_\mu V^\rho = \partial_\mu V^\rho + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho V^\sigma, \quad (\text{A.1})$$

$$D_\mu V_\rho = \partial_\mu V_\rho - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma V_\sigma. \quad (\text{A.2})$$

El tensor de Riemann es

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda, \quad (\text{A.3})$$

en tanto que el tensor de Ricci se define mediante la contracción

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda. \quad (\text{A.4})$$

A lo largo de la Tesis asumimos compatibilidad métrica; esto es, la derivada covariante de la métrica del espacio-tiempo  $g_{\mu\nu}$  y de la métrica del espacio tangente  $\eta_{ab}$  son idénticamente nulas:

$$D_\lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad D\eta_{ab} = 0, \quad (\text{A.5})$$

donde  $D_\mu$  es la derivada covariante en la conexión  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  y  $D$  es la derivada covariante en la conexión  $\omega_b^a$ . Sin embargo, *no* asumimos nulidad de la torsión; ambas condiciones son independientes, y se requiere de las dos para reducir la conexión  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  al símbolo de Christoffel  $\{\begin{smallmatrix} \lambda \\ \mu\nu \end{smallmatrix}\}$ . Es interesante notar que la nulidad de la derivada covariante exterior de la métrica de Minkowski es equivalente a la antisimetría de la conexión de spin,  $\omega^{ab} = -\omega^{ba}$ .



# Apéndice B

## El tensor $\delta_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_r}$

La delta de Kronecker generalizada es definida mediante el determinante

$$\delta_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_r} \equiv \det \begin{bmatrix} \delta_{\nu_1}^{\mu_1} & \delta_{\nu_2}^{\mu_1} & \dots & \delta_{\nu_r}^{\mu_1} \\ \delta_{\nu_1}^{\mu_2} & \delta_{\nu_2}^{\mu_2} & \dots & \delta_{\nu_r}^{\mu_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{\nu_1}^{\mu_r} & \delta_{\nu_2}^{\mu_r} & \dots & \delta_{\nu_r}^{\mu_r} \end{bmatrix},$$

donde  $1 \leq r \leq n$ , siendo  $n$  la dimensionalidad del espacio(-tiempo). De su definición, la delta generalizada es un tensor de tipo  $(r, r)$  totalmente antisimétrico; i.e.,  $\delta_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_r} = \delta_{[\nu_1 \dots \nu_r]}^{[\mu_1 \dots \mu_r]}$ . La siguiente identidad es válida cuando se contraen los últimos  $(r - s)$  índices:

$$\delta_{\nu_1 \dots \nu_s \mu_{s+1} \dots \mu_r}^{\mu_1 \dots \mu_s \mu_{s+1} \dots \mu_r} = \frac{(n - s)!}{(n - r)!} \delta_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_s}. \quad (\text{B.1})$$

Un caso particular de interés es

$$\delta_{\mu_1 \dots \mu_r}^{\mu_1 \dots \mu_r} = \frac{n!}{(n - r)!}. \quad (\text{B.2})$$

Sea  $A^{\mu_1 \dots \mu_r}$  un tensor totalmente antisimétrico. Entonces,

$$\delta_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_r} A^{\nu_1 \dots \nu_r} = r! A^{\mu_1 \dots \mu_r}, \quad (\text{B.3})$$

$$\delta_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_r} A_{\mu_1 \dots \mu_r} = r! A_{\nu_1 \dots \nu_r}. \quad (\text{B.4})$$

El símbolo de permutaciones de Levi-Civita puede ser escrito como un caso particular de la delta de Kronecker generalizada:

$$\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_r} = \delta_{\mu_1 \dots \mu_r}^{1 \dots r}, \quad (\text{B.5})$$

$$\varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_r} = \delta_{1 \dots r}^{\mu_1 \dots \mu_r}. \quad (\text{B.6})$$

El producto de dos símbolos de Levi-Civita permite recuperar la delta:

$$\varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_r} \varepsilon_{\nu_1 \dots \nu_r} = \delta_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_r}. \quad (\text{B.7})$$

Las propiedades del delta de Kronecker generalizado son usadas ocasionalmente en el texto.

# Apéndice C

## El grupo de (anti-) de Sitter

El grupo de anti-de Sitter  $G = SO(d-1, 2)$  es el grupo de rotaciones de un espacio plano de  $d+1$  dimensiones con métrica  $\eta_{AB} = \text{diag}(-, +, \dots, +, -)$ , en donde  $A, B = 1, \dots, d+1$ . Sus generadores  $J_{AB}$  satisfacen el álgebra de Lie [cf. ec. (4.36), la cual es válida para cualquier signatura de la métrica]

$$[J_{AB}, J_{CD}] = \eta_{CB}J_{AD} - \eta_{CA}J_{BD} + \eta_{DB}J_{CA} - \eta_{DA}J_{CB}. \quad (\text{C.1})$$

Este grupo también puede ser entendido como el grupo de simetrías de un espacio de  $d$  dimensiones con curvatura negativa constante. Para poder hacer explícita la comparación con el grupo de Poincaré  $ISO(d-1, 1)$  es conveniente separar los generadores  $J_{AB}$  en  $J_{ab}$  (con  $a, b = 1, \dots, d$ ) y  $P_a \equiv (1/\ell) J_{a,d}$ , en donde  $\ell$  es una constante con dimensiones de longitud. Haciendo esto, el álgebra (C.1) puede ser escrita en la forma

$$[P_a, P_b] = \frac{1}{\ell^2} J_{ab}, \quad (\text{C.2})$$

$$[J_{ab}, P_c] = \eta_{cb}P_a - \eta_{ca}P_b, \quad (\text{C.3})$$

$$[J_{ab}, J_{cd}] = \eta_{cb}J_{ad} - \eta_{ca}J_{bd} + \eta_{db}J_{ca} - \eta_{da}J_{cb}. \quad (\text{C.4})$$

Aquí los generadores  $J_{ab}$  corresponden al subgrupo  $H = SO(d-1, 1)$  [el grupo de Lorentz, como se desprende del álgebra (C.4)] y los  $P_a$  al coseto  $\{G/H\}$ . Esta forma de escribir el álgebra nos muestra que en el límite  $\ell \rightarrow \infty$  recuperamos el grupo de Poincaré, proceso que es conocido como *contracción de Inönü-Wigner*.

Una representación para el grupo de (anti-) de Sitter es provista por las matrices de Dirac  $\Gamma_a$ . Estas matrices son definidas mediante el requerimiento

$$\{\Gamma_a, \Gamma_b\} = 2\eta_{ab}, \quad (\text{C.5})$$

donde  $\eta_{ab}$  es la métrica de Minkowski de un espacio de  $d$  dimensiones,  $\eta_{ab} = \text{diag}(-, +, \dots, +)$ , y  $\{\cdot, \cdot\}$  representa el anticonmutador. Definiendo

$$\Gamma_{ab} \equiv \frac{1}{2} [\Gamma_a, \Gamma_b] \quad (\text{C.6})$$

es directo demostrar que las matrices  $\Gamma_a$  y  $\Gamma_{ab}$  satisfacen el álgebra de Lie

$$[\Gamma_a, \Gamma_b] = 2\Gamma_{ab}, \quad (\text{C.7})$$

$$[\Gamma_{ab}, \Gamma_c] = 2(\eta_{cb}\Gamma_a - \eta_{ac}\Gamma_b), \quad (\text{C.8})$$

$$[\Gamma_{ab}, \Gamma_{cd}] = 2(\eta_{cb}\Gamma_{ad} - \eta_{ac}\Gamma_{bd} + \eta_{db}\Gamma_{ca} - \eta_{ad}\Gamma_{cb}). \quad (\text{C.9})$$

Por lo tanto, podemos representar los generadores  $J_{ab}$  y  $P_a$  del grupo de anti-de Sitter mediante las matrices

$$J_{ab} = \frac{1}{2}\Gamma_{ab}, \quad P_a = \frac{\ell}{2}\Gamma_a,$$

Para obtener el grupo de de Sitter sólo es necesario modificar el generador de boosts de acuerdo a  $P_a = (\ell/2i)\Gamma_a$ .

# Apéndice D

## Identidades Triangulares

Comenzamos haciendo la siguiente definición [28]: si  $X$  e  $Y$  son elementos de un álgebra de Lie, entonces

$$X \triangle Y \equiv [X, Y], \quad (\text{D.1})$$

$$X^{n+1} \triangle Y \equiv [X, X^n \triangle Y], \quad n \geq 1. \quad (\text{D.2})$$

Para una función analítica  $f$  dada en términos de su desarrollo en serie de potencias en torno a  $x = 0$ ,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n,$$

podemos definir la expresión  $f(X) \triangle Y$  a partir de

$$\begin{aligned} f(X) \triangle Y &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} f_n (X^n \triangle Y), \\ &= f_0 Y + f_1 [X, Y] + f_2 [X, [X, Y]] + \dots \end{aligned}$$

Notemos que esta definición implica que  $1 \triangle Y = Y$ .

Una forma explícita para  $X^n \triangle Y$  es dada por la identidad

$$X^n \triangle Y = \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{n}{p} X^{n-p} Y X^p, \quad (\text{D.3})$$

la cual puede demostrarse usando el método de inducción matemática.

Las siguientes identidades son extremadamente útiles para la manipulación de conmutadores anidados:

$$\exp(X) Y \exp(-X) = \exp(X) \Delta Y, \quad (\text{D.4})$$

$$\exp(X) \delta \exp(-X) = \frac{1 - \exp(X)}{X} \Delta \delta X, \quad (\text{D.5})$$

donde por  $\delta \exp(-X)$  entendemos la expresión

$$\delta \exp(-X) = \exp[-(X + \delta X)] - \exp(-X),$$

evaluada a primer orden en  $\delta X$ . Estas identidades pueden demostrarse escribiendo ambos lados como series de potencias (a través de la definición de  $\Delta$ ) y usando (D.3).

Cuando  $P_a$  y  $J_{ab}$  generan el álgebra del grupo de anti-de Sitter [ver ec. (C.1)], es posible demostrar las siguientes identidades:

$$(\zeta^c P_c)^{2n+1} \Delta P_a = \frac{z^{2n}}{2\ell^2} (\zeta^c \delta_a^d - \zeta^d \delta_a^c) J_{cd}, \quad n \geq 0, \quad (\text{D.6})$$

$$(\zeta^c P_c)^{2n} \Delta P_a = z^{2n} \left( \delta_a^c - \frac{\zeta^c \zeta_a}{\zeta^2} \right) P_c, \quad n \geq 1, \quad (\text{D.7})$$

$$(\zeta^c P_c)^{2n+1} \Delta J_{ab} = z^{2n} (\zeta_a \delta_b^c - \zeta_b \delta_a^c) P_c, \quad n \geq 0, \quad (\text{D.8})$$

$$(\zeta^c P_c)^{2n} \Delta J_{ab} = \frac{z^{2n}}{2\zeta^2} (\zeta_a \delta_b^e - \zeta_b \delta_a^e) (\zeta^c \delta_e^d - \zeta^d \delta_e^c) J_{cd}, \quad n \geq 1, \quad (\text{D.9})$$

donde  $z = \zeta/\ell$ . Su demostración requiere la utilización de las identidades (D.4) y (D.5), más el método de inducción matemática. Las identidades (D.6) - (D.9) serán indispensables a la hora de calcular los campos no lineales  $V^a$  y  $W^{ab}$  en términos de  $e^a$ ,  $\omega^{ab}$  y  $\zeta^a$ .

# Apéndice E

## Cálculo de $V^a$ y $W^{ab}$

En este apéndice calculamos las expresiones explícitas para los campos no lineales  $V^a$  y  $W^{ab}$  partiendo de la ecuación [cf. ec. (7.12)]

$$\frac{1}{2}W^{ab}J_{ab} + V^a P_a = \exp(-\zeta^c P_c) \left( d + \frac{1}{2}\omega^{ab}J_{ab} + e^a P_a \right) \exp(\zeta^d P_d). \quad (\text{E.1})$$

Esta ecuación puede ser prontamente reescrita como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}W^{ab}J_{ab} + V^a P_a &= \exp(-\zeta^c P_c) d \exp(\zeta^d P_d) + \\ &+ \exp(-\zeta^c P_c) \left( \frac{1}{2}\omega^{ab}J_{ab} + e^a P_a \right) \exp(\zeta^d P_d). \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

En este punto podemos utilizar las identidades citadas en el Apéndice D, las cuales reproducimos aquí para mayor conveniencia del lector [cf. ecs. (D.4) y (D.5)]:

$$\exp(X) Y \exp(-X) = \exp(X) \Delta Y, \quad (\text{E.3})$$

$$\exp(X) d \exp(-X) = \frac{1 - \exp(X)}{X} \Delta dX. \quad (\text{E.4})$$

Definiendo

$$\begin{aligned} X &= -\zeta^a P_a, \\ Y &= \frac{1}{2}\omega^{ab}J_{ab} + e^a P_a, \end{aligned}$$

podemos escribir (E.2) en la forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}W^{ab}J_{ab} + V^aP_a &= \exp(X) d \exp(-X) + \exp(X) Y \exp(-X), \\ &= \frac{1 - \exp(X)}{X} \Delta dX + \exp(X) \Delta Y, \end{aligned}$$

en donde hemos utilizado (E.3) y (E.4). Una aplicación directa de las identidades (D.6) - (D.9) muestra que

$$\begin{aligned} \frac{1 - \exp(X)}{X} \Delta dX &= d\zeta^a \left[ \delta_a^c + \left( \frac{\sinh z}{z} - 1 \right) \left( \delta_a^c - \frac{\zeta^c \zeta_a}{\zeta^2} \right) \right] P_c + \\ &\quad - \frac{1}{2\ell^2} \left( \frac{\cosh z - 1}{z^2} \right) d\zeta^a (\zeta^c \delta_a^d - \zeta^d \delta_a^c) J_{cd}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \exp(X) \Delta Y &= \frac{1}{2} \left\{ \omega^{ab} - \frac{1}{\ell^2} (\zeta^a \delta_c^b - \zeta^b \delta_c^a) \left[ \left( \frac{\sinh z}{z} \right) e^c + \left( \frac{\cosh z - 1}{z^2} \right) \omega_d^c \zeta^d \right] \right\} J_{ab} + \\ &\quad + \left\{ \left[ \delta_b^a + (\cosh z - 1) \left( \delta_b^a - \frac{\zeta^a \zeta_b}{\zeta^2} \right) \right] e^b + \frac{\sinh z}{z} \omega_b^a \zeta^b \right\} P_a. \end{aligned}$$

Juntándolo todo, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}W^{ab}J_{ab} + V^aP_a &= \left\{ \left[ \delta_b^a + (\cosh z - 1) \left( \delta_b^a - \frac{\zeta^a \zeta_b}{\zeta^2} \right) \right] e^b + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \delta_b^a + \left( \frac{\sinh z}{z} - 1 \right) \left( \delta_b^a - \frac{\zeta^a \zeta_b}{\zeta^2} \right) \right] d\zeta^b + \frac{\sinh z}{z} \omega_b^a \zeta^b \right\} P_a + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \omega^{ab} - \frac{1}{\ell^2} (\zeta^a \delta_c^b - \zeta^b \delta_c^a) \left[ \left( \frac{\sinh z}{z} \right) e^c + \left( \frac{\cosh z - 1}{z^2} \right) D_\omega \zeta^c \right] \right\} J_{ab}, \end{aligned}$$

donde  $D_\omega \zeta^a \equiv d\zeta^a + \omega_b^a \zeta^b$  es la derivada covariante (en la conexión  $\omega$ ) de  $\zeta^a$ . De aquí rescatamos la forma explícita de  $V^a$  y  $W^{ab}$ :

$$V^a = T_b^a (\ln \cosh z) e^b + T_b^a \left( \ln \frac{\sinh z}{z} \right) D_\omega \zeta^b, \quad (\text{E.5})$$

$$W^{ab} = \omega^{ab} - \frac{1}{\ell^2} (\zeta^a \delta_c^b - \zeta^b \delta_c^a) \left[ \left( \frac{\sinh z}{z} \right) e^c + \left( \frac{\cosh z - 1}{z^2} \right) D_\omega \zeta^c \right], \quad (\text{E.6})$$

donde  $T_b^a(u)$  está definido en el Apéndice G, ec. (G.1).

# Apéndice F

## Cálculo de $\delta\zeta^a$ y $h$ para un boost de AdS

Como se explica en la sección 7.2, la acción de una transformación infinitesimal  $g \in SO(d-1, 2)$  sobre los campos no lineales  $V^a$  y  $W^{ab}$  es dada según las ecuaciones

$$\delta V^a = h^a_b V^b, \quad (\text{F.1})$$

$$\delta W^{ab} = -D_W h^{ab}, \quad (\text{F.2})$$

en donde  $h \in SO(d-1, 1)$  ha de ser obtenido de la ecuación

$$g \exp(\zeta^a P_a) = \exp(\zeta'^a P_a) h. \quad (\text{F.3})$$

Para una transformación de Lorentz,  $g = h$ , de modo que no hay esencialmente nada que calcular. En este caso, la ley de transformación para  $\zeta^a$  es obtenida de

$$\exp(\zeta'^a P_a) = h \exp(\zeta^a P_a) h^{-1}.$$

Si  $h = 1 + \frac{1}{2}h^{ab}J_{ab}$  y tanto  $\zeta^a$  como  $\zeta'^a$  son infinitesimales, hallamos

$$\delta\zeta^a = h^a_b \zeta^b, \quad (\text{F.4})$$

lo cual nos dice que  $\zeta^a$  transforma como un vector bajo  $SO(d-1, 1)$ .

El problema que queremos afrontar en este Apéndice es el cálculo de  $\delta\zeta^a$  y de  $h$  para un boost infinitesimal de AdS,  $g = 1 + \epsilon^a P_a$ . Para ello, tomamos la versión infinitesimal de (F.3),

$$\exp(-\zeta^b P_b) (g - 1) \exp(\zeta^a P_a) - \exp(-\zeta^b P_b) \delta \exp(\zeta^a P_a) = h - 1, \quad (\text{F.5})$$

donde hemos escrito

$$g = 1 + (g - 1), \quad (\text{F.6})$$

$$h = 1 + (h - 1), \quad (\text{F.7})$$

$$\exp(\zeta'^a P_a) = \exp(\zeta^a P_a) + \delta \exp(\zeta^a P_a). \quad (\text{F.8})$$

Insertando  $g - 1 = \epsilon^a P_a$ ,  $h - 1 = \frac{1}{2}h^{ab}J_{ab}$  en (F.5), nos queda

$$\exp(-\zeta^b P_b) \epsilon^c P_c \exp(\zeta^a P_a) - \exp(-\zeta^b P_b) \delta \exp(\zeta^a P_a) = \frac{1}{2}h^{ab}J_{ab}. \quad (\text{F.9})$$

Teniendo en mente las identidades

$$\exp(X) Y \exp(-X) = \exp(X) \Delta Y, \quad (\text{F.10})$$

$$\exp(X) \delta \exp(-X) = \frac{1 - \exp(X)}{X} \Delta \delta X, \quad (\text{F.11})$$

introducidas en el Apéndice D, llamamos

$$X = -\zeta^a P_a,$$

$$Y = \epsilon^a P_a,$$

lo que nos permite escribir

$$\exp(X) Y \exp(-X) - \exp(X) \delta \exp(-X) = \frac{1}{2}h^{ab}J_{ab},$$

o bien,

$$\exp(X) \Delta Y - \frac{1 - \exp(X)}{X} \Delta \delta X = \frac{1}{2}h^{ab}J_{ab}.$$

En nuestro caso particular,

$$\exp(X) \Delta Y = \epsilon^b \left[ \delta_b^a + (\cosh z - 1) \left( \delta_b^a - \frac{\zeta^a \zeta_b}{\zeta^2} \right) \right] P_a - \frac{1}{2\ell^2} \frac{\sinh z}{z} \epsilon^c (\zeta^a \delta_c^b - \zeta^b \delta_c^a) J_{ab}.$$

El otro término que nos interesa es

$$\begin{aligned} \frac{1 - \exp(X)}{X} \Delta \delta X &= \delta \zeta^b \left[ \delta_b^a + \left( \frac{\sinh z}{z} - 1 \right) \left( \delta_b^a - \frac{\zeta^a \zeta_b}{\zeta^2} \right) \right] P_a + \\ &\quad - \frac{1}{2\ell^2} \frac{\cosh z - 1}{z^2} \delta \zeta^c (\zeta^a \delta_c^b - \zeta^b \delta_c^a) J_{ab}. \end{aligned}$$

Juntándolo todo, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} h^{ab} J_{ab} = & \epsilon^b \left[ \delta_b^a + (\cosh z - 1) \left( \delta_b^a - \frac{\zeta^a \zeta_b}{\zeta^2} \right) \right] P_a - \frac{1}{2\ell^2} \frac{\sinh z}{z} \epsilon^c (\zeta^a \delta_c^b - \zeta^b \delta_c^a) J_{ab} + \\ & - \delta\zeta^b \left[ \delta_b^a + \left( \frac{\sinh z}{z} - 1 \right) \left( \delta_b^a - \frac{\zeta^a \zeta_b}{\zeta^2} \right) \right] P_a + \frac{1}{2\ell^2} \frac{\cosh z - 1}{z^2} \delta\zeta^c (\zeta^a \delta_c^b - \zeta^b \delta_c^a) J_{ab}. \end{aligned}$$

Reordenando, esto llega a ser

$$\begin{aligned} 0 = & \left[ T_b^a (\ln \cosh z) \epsilon^b - T_b^a \left( \ln \frac{\sinh z}{z} \right) \delta\zeta^b \right] P_a + \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\ell^2} (\zeta^a \delta_c^b - \zeta^b \delta_c^a) \left[ \left( \frac{\cosh z - 1}{z^2} \right) \delta\zeta^c - \left( \frac{\sinh z}{z} \right) \epsilon^c \right] - h^{ab} \right\} J_{ab}, \end{aligned}$$

de donde obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} T_b^a \left( \ln \frac{\sinh z}{z} \right) \delta\zeta^b &= T_b^a (\ln \cosh z) \epsilon^b, \\ h^{ab} &= \frac{1}{\ell^2} (\zeta^a \delta_c^b - \zeta^b \delta_c^a) \left[ \left( \frac{\cosh z - 1}{z^2} \right) \delta\zeta^c - \left( \frac{\sinh z}{z} \right) \epsilon^c \right]. \end{aligned}$$

Con el fin de despejar  $\delta\zeta^a$  de la primera de estas relaciones, usamos las propiedades de las matrices  $T$  (ver Apéndice G); encontramos

$$\delta\zeta^a = T_b^a \left( \ln \frac{z \cosh z}{\sinh z} \right) \epsilon^b. \quad (\text{F.12})$$

Reemplazando (F.12) en la segunda relación, nos queda

$$h^{ab} = \frac{1}{\ell^2} (\zeta^a \delta_c^b - \zeta^b \delta_c^a) \left[ \left( \frac{\cosh z - 1}{z^2} \right) T_d^c \left( \ln \frac{z \cosh z}{\sinh z} \right) \epsilon^d - \left( \frac{\sinh z}{z} \right) \epsilon^c \right],$$

de donde

$$h^{ab} = \frac{1}{\ell^2} \frac{\cosh z - 1}{z \sinh z} (\epsilon^a \zeta^b - \epsilon^b \zeta^a). \quad (\text{F.13})$$

Estos son los parámetros que entran en las leyes de transformación (F.1) y (F.2) de  $V^a$  y  $W^{ab}$  bajo un boost de AdS.



# Apéndice G

## Una representación matricial para el grupo de traslaciones

Sea

$$T_b^a(u) \equiv e^u \delta_b^a + (1 - e^u) \frac{\zeta^a \zeta_b}{\zeta^2}. \quad (\text{G.1})$$

Estas matrices satisfacen las propiedades

1. Existencia de identidad:

$$T_b^a(0) = \delta_b^a,$$

2. Existencia de inverso:

$$T_c^a(-u) T_b^c(u) = T_c^a(u) T_b^c(-u) = \delta_b^a,$$

3. Asociatividad:

$$[T_c^a(u) T_d^c(v)] T_b^d(w) = T_c^a(u) [T_d^c(v) T_b^d(w)],$$

4. Clausura:

$$T_c^a(u) T_b^c(v) = T_b^a(u + v),$$

y forman por lo tanto un grupo, el cual es isomorfo al grupo de traslaciones en una dimensión.

La propiedad algebraica clave que permite que estas matrices formen un grupo es que la matriz

$$M_b^a \equiv \frac{\zeta^a \zeta_b}{\zeta^2}$$

es idempotente; esto es,

$$M_c^a M_b^c = M_b^a \quad \Leftrightarrow \quad M^2 = M.$$

En lenguaje matricial, entonces,

$$T = e^u + (1 - e^u) M,$$

y la propiedad de grupo proviene de que podemos escribir  $T$  como

$$T = e^{u(1-M)},$$

en donde  $1 - M$  es también idempotente:  $(1 - M)^2 = 1 - M$ . En efecto,

$$\begin{aligned} e^{u(1-M)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n (1-M)^n}{n!}, \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n!} (1-M), \\ &= 1 + (e^u - 1)(1-M), \\ &= e^u + (1 - e^u) M. \end{aligned}$$

Las propiedades de  $T_b^a$  pueden resumirse en la identidad

$$e^u \delta_b^a + (1 - e^u) \frac{\zeta^a \zeta_b}{\zeta^2} = \exp \left[ u \left( \delta_b^a - \frac{\zeta^a \zeta_b}{\zeta^2} \right) \right].$$

Este cálculo muestra el porqué de la parametrización escogida para las matrices  $T$ . Las propiedades de estas matrices son usadas repetidamente en el texto.

# Apéndice H

## El Teorema de Noether

Sea  $L = L(\phi)$  un lagrangeano para un campo  $\phi$ . Bajo  $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$ , este lagrangeano cambia en

$$\delta L = E(\phi) \delta\phi + d\Theta(\phi, \delta\phi),$$

donde  $E(\phi)$  son las ecuaciones de movimiento y  $d\Theta$  es una derivada total que depende de los campos y sus variaciones. Si hacemos una transformación de gauge (es decir, si la transformación  $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$  corresponde a una simetría de la acción), entonces el lagrangeano cambia por

$$\delta L = d\Omega.$$

Esto significa que, on shell [i.e., cuando  $E(\phi) = 0$ ], tenemos

$$d \star J = 0,$$

con

$$\star J = \Omega - \Theta. \tag{H.1}$$

Bajo un difeomorfismo generado por un campo vectorial  $\xi$ , el lagrangeano cambia de acuerdo a [cf. ec. (2.39)]

$$\begin{aligned} \delta L &= -\mathcal{L}_\xi L, \\ &= -(dI_\xi + I_\xi d)L, \\ &= -d(I_\xi L), \end{aligned}$$

ya que  $dL = 0$ . En este caso, la corriente

$$\star J = -\Theta - I_\xi L \tag{H.2}$$

es conservada on shell:

$$d \star J = 0,$$

cuando  $E(\phi) = 0$ . La fórmula general para  $\star J$  viene de superponer ambos casos: ella es

$$\star J = \Omega - \Theta - I_\xi L. \tag{H.3}$$

Esta es la fórmula general que ocuparemos para calcular las corrientes conservadas bajo rotaciones locales de Lorentz, boosts de AdS y difeomorfismos de la acción de Lovelock.

# Bibliografía

- [1] R. Aros, M. Contreras, R. Olea, R. Troncoso, J. Zanelli, *Conserved Charges for Gravity with Locally Anti-de Sitter Asymptotics*. Phys. Rev. Lett. **84**, 1647 (2000).
- [2] R. Aros, M. Contreras, R. Olea, R. Troncoso, J. Zanelli, *Conserved charges for even dimensional asymptotically AdS gravity theories*. Phys. Rev. D **62**, 044002 (2000).
- [3] M. Bañados, C. Teitelboim, J. Zanelli, *Dimensionally continued black holes*. Phys. Rev. D **49**, 975 (1994).
- [4] C. G. Callan, S. Coleman, J. Wess, B. Zumino, *Structure of Phenomenological Lagrangians. II*. Phys. Rev. **177**, 2247 (1969).
- [5] S. Carroll, *Lecture notes on General Relativity*. arXiv: gr-qc/9712019.
- [6] A. H. Chamseddine, *Topological Gauge Theory of Gravity in five and all odd dimensions*. Phys. Lett. B **233**, 291 (1989).
- [7] S. Coleman, J. Wess, B. Zumino, *Structure of Phenomenological Lagrangians. I*. Phys. Rev. **177**, 2239 (1969).
- [8] E. Cremmer, B. Julia, J. Scherk, *Supergravity Theory in eleven dimensions*. Phys. Lett. B **76**, 409 (1978).
- [9] J. Crisóstomo, R. Troncoso, J. Zanelli, *Black Hole Scan*. Phys. Rev. D **62**, 084013 (2000).
- [10] T. Eguchi, P. Gilkey, A. Hanson, *Gravitation, Gauge theories and Differential geometry*. Phys. Rep. **66**, 213 (1980).

- [11] R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras, and some of their applications*. John Wiley & Sons, Inc., 1974.
- [12] G. Grignani, G. Nardelli, *Gravity and the Poincaré Group*. Phys. Rev. D **45**, 2719 (1992).
- [13] G. Grignani, G. Nardelli, *Chern-Simons Gravity from (3 + 1)-dimensional Gravity*. Phys. Lett. B **300**, 38 (1993).
- [14] F. Izaurieta, E. Rodríguez, P. Salgado, *Dimensional Reduction of Lanczos-Lovelock Gravity in odd and even dimensions* (trabajo en preparación).
- [15] C. Lanczos, Ann. Math. **39**, 842 (1938).
- [16] D. Lovelock, *The Einstein Tensor and Its Generalizations*. J. Math. Phys. **12**, 498 (1971).
- [17] A. Mardones, J. Zanelli, *Lovelock-Cartan theory of gravity*. Class. Quantum Grav. **8**, 1545 (1991).
- [18] R. L. Mills, C. N. Yang, *Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance*. Phys. Rev. **96**, 191 (1954).
- [19] C. Misner, K. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, 1973.
- [20] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*. Graduate Student Series in Physics, Adam Hilger, Bristol, Philadelphia and New York, 1991.
- [21] L. O’Raifeartaigh, N. Straumann, *Gauge Theory: Historical origins and some modern developments*. Rev. Mod. Phys. **72**, 1 (2000).
- [22] J. Polchinski, *String Theory, Vol. 1: An Introduction to the Bosonic String; String Theory, Vol. 2: Superstring Theory and beyond*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 1998.
- [23] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*. Addison-Wesley Company, Inc., 1981.
- [24] A. Salam, J. Strathdee, *Nonlinear Realizations. I. The Role of Goldstone Bosons*. Phys. Rev. **184**, 1750 (1969).

- [25] P. Salgado, M. Cataldo, S. del Campo, *Supergravity and the Poincaré group*. Phys. Rev. D **65**, 084032 (2002).
- [26] P. Salgado, M. Cataldo, S. del Campo, *Higher dimensional gravity invariant under the Poincaré group*. Phys. Rev. D **66**, 024013 (2002).
- [27] P. Salgado, F. Izaurieta, E. Rodríguez, *Higher dimensional gravity invariant under the AdS group*. arXiv: hep-th/0305180.
- [28] K. S. Stelle, P. C. West, *Spontaneously broken de Sitter symmetry and the gravitational holonomy group*. Phys. Rev. D **6**, 1466 (1980).
- [29] G. 't Hooft, M. J. G. Veltman, *Regularization and Renormalization of gauge fields*. Nucl. Phys. B **44**, 189 (1972).
- [30] R. Troncoso, J. Zanelli, *New gauge supergravity in seven and eleven dimensions*. Phys. Rev. D **58**, 101703 (1998).
- [31] R. Troncoso, J. Zanelli, *Higher-dimensional gravity, propagating torsion and AdS gauge invariance*. Class. Quantum Grav. **17**, 4451 (2000).
- [32] J. Zanelli, *(Super)-Gravities beyond 4 dimensions*. Lectures given at the 2001 Summer School *Geometric and Topological Methods for Quantum Field Theory*, Villa de Leyva, Colombia, June 2001. arXiv: hep-th/0206169.